第19讲：习题课(极限、连续性、可微性等)

(一)高阶微分未必有"形式不变性"

(1). 设 $y=f(x)$ 在 I 上二阶可导，则

$$dy=df(x)=f'(x)dx,\quad d(dy)\triangleq d^2y=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx$$

$$\xlongequal[\text{常量}]{\text{视}dx=\Delta x\text{为}} f''(x)dx\,dx=f''(x)(dx)^2\triangleq f''(x)dx^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)，\text{当}f(x)\,n\text{阶可导时，}\frac{d^ny}{dx^n}=f^{(n)}(x)，\forall n\in N^*.$$

(2). 设 $y=f(x)$，$x\in I$，$x=\varphi(t)$，$t\in E$ 均二阶可导，则

$$dy=df(x)=df(\varphi(t))=(f(\varphi(t)))'_t dt=f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=f'(x)dx$$

$$d(dy)=d(f'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt)=(f'(\varphi(t))\varphi'(t)dt)'_t dt \xlongequal{\text{视}dt\text{为常量}}$$

$$(f''(\varphi(t))(\varphi'(t))^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t))dt\,dt$$

$$=f''(\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)(dt)^2$$

$$=f''(x)dx^2+f'(\varphi(t))\varphi''(t)dt^2 \neq f''(x)dx^2$$

$$\xlongequal[\text{当且仅当}\varphi(t)=at+b]{} f''(x)dx^2\quad (a,b\text{为常数})$$

即当且仅当 $x=\varphi(t)$ 是 t 的一次函数时，二阶微分才有"形式不变性"。

(1).

同理，三阶及以上的高阶微分一般情况下，都不存在微分形式不变性。

㈢ 海涅(Heine)定理及其证明：（设 $x_0\in R$）

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a\in R \Leftrightarrow \forall\{a_n\}$：$a_n\to x_0\ (n\to\infty)$，$a_n\neq x_0$，恒有：

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)=a.$$

证必要性："$\Longrightarrow$" 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a \Rightarrow \underbrace{\forall\varepsilon>0}_{①}$，$\exists\delta>0$，对 $\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-a|<\varepsilon$. 对上述 $\delta>0$，由 $a_n\to x_0\ (n\to\infty)$，$a_n\neq x_0$

$\Rightarrow \underbrace{\exists n_0\in N^*}_{②}$，$\underbrace{对\forall n>n_0}_{③}$，有 $0<|a_n-x_0|<\delta \Rightarrow \underbrace{|f(a_n)-a|<\varepsilon}_{④}$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}f(a_n)=a.$

证充分性："$\Longleftarrow$"（反证法）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq a$，$\Rightarrow \exists\varepsilon_0>0$.

对 $\forall\delta>0$，$\exists x$：$0<|x-x_0|<\delta$，而 $|f(x)-a|\geq\varepsilon_0$. 取 $\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,\cdots$

则 $\delta_n>0$，对此 $\delta_n>0$，$\exists x_n$：$0<|x_n-x_0|<\delta_n=\frac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$

而 $|f(x_n)-a|\geq\varepsilon_0$，显然有 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，$x_n\neq x_0$，但

$f(x_n)\not\to a\ (n\to\infty)$. 矛盾！ $\therefore \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a.$

(三) 函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛的 Cauchy 准则：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛 $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 对 $\forall x_1, x_2 \in \mathring{U}(x_0,\delta)$, $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

证"$\Longrightarrow$"(必要性)：已知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 收敛. 令 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in R$.

则对 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, 对 $\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$, $|f(x)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$ 恒成立.

任取 $x_1, x_2\in \mathring{U}(x_0,\delta)$, $\Rightarrow |f(x_1)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x_2)-a|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\Rightarrow$

$|f(x_1)-f(x_2)| \le |f(x_1)-a|+|a-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. 必要性获证.

证"$\Longleftarrow$"(充分性)：已知对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 对 $\forall x_1, x_2\in \mathring{U}(x_0,\delta)$, 恒有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$, 对上述 $\delta>0$, 任取 $\{a_n\}$: $a_n\to x_0\ (n\to\infty)$, $a_n\neq x_0$.

则 $\exists n_0\in N^*$, 当 $m>n>n_0$ 时, $\begin{cases} 0<|a_m-x_0|<\delta \\ 0<|a_n-x_0|<\delta, \end{cases}$

即 $a_m, a_n\in \mathring{U}(x_0,\delta) \Rightarrow |f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon$ 依数列极限的 Cauchy 准则, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛. 令 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=\alpha\in R$.

下证: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\alpha$.

已知: 对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $x_1, x_2\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 时, $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

且已知 $\begin{cases} a_n\to x_0,\ a_n\neq x_0 & (n\to\infty) \\ f(a_n)\to \alpha & (n\to\infty) \end{cases}$

由 $f(a_n)\to\alpha\ (n\to\infty)\Rightarrow$ 对上述 $\varepsilon>0$，$\exists N_1\in N^*$，当 $n>N_1$ 时

$|f(a_n)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}$；由 $a_n\to x_0,\ a_n\neq x_0\ (n\to\infty)$，对上述 $\delta>0$，$\exists N_2\in N^*$

$N_2>N_1$，当 $n>N_2$ 时，$0<|a_n-x_0|<\delta$，此时，对 $\forall x:\ 0<|x-x_0|<\delta$ ③

$\because a_n,\ x\in \mathring{U}(x_0,\delta)\Rightarrow |f(a_n)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$

$|f(x)-\alpha|\le|f(x)-f(a_n)|+|f(a_n)-\alpha|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ④，故 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha$.

(四). $f'(x_0+0)\xlongequal{\text{未必}}f'_+(x_0)$；$f'(x_0-0)\xlongequal{\text{未必}}f'_-(x_0)$

当 $f(x)$ 在 x_0 处 C 时，$f'_+(x_0)=f'(x_0+0)$；$f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$.

例1. $y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}0, & x>0\\ \text{不存在}, & x=0\\ 0, & x<0.\end{cases}$

则 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}0=0$，而 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-0}{x}=\infty\neq0=f'(0+0)$. 同理：$f'(0-0)=0\neq f'_-(0)$

例2. $y=f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 则 $f'(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0.\end{cases}$

则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=0=f'_-(0)\Rightarrow f'(0)=0$

而 $f'(0+0)=\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})=$ 振荡发散.

$\because f_+'(0)=0\neq f'(0+0)$，同理，$f_-'(0)=0\neq f'(0-0)$.

而当 $f(x)$ 在 x_0 处 C 时，由 Lagrange 微分中值定理：

$$f_+'(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}=\lim_{\xi\to x_0^+}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)$$

$=f'(x_0+0)$；同理，$f_-'(x_0)=f'(x_0-0)$.

(五). 若 $f^{(2)}(x_0)$ 存在，则 $\exists\delta>0$，使得 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，恒有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\quad(式1)$$

若 $f^{(3)}(x_0)$ 存在，则 $\exists\delta>0$，对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，恒有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+o((x-x_0)^3),\quad(式2)$$

若 $f^{(n)}(x_0)$ 存在，$\forall n\in N^*$，则 $\exists\delta>0$，对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，恒有：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)\quad(式3)$$

证(式1). 令 $\begin{cases} g(x)=f(x)-\left[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2\right] \\ h(x)=(x-x_0)^2 \end{cases}$，则 $\begin{cases} g(x_0)=g'(x_0)=0 \\ h(x_0)=h'(x_0)=0 \end{cases}$

且 $\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)}\xlongequal{柯西}\lim_{x\to x_0}\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{g'(\xi)}{h'(\xi)}$

$=\lim_{x\to x_0}\frac{g'(x)}{h'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)-f''(x_0)(x-x_0)}{2(x-x_0)}$

$=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}-f''(x_0)\right)=\frac{1}{2}(f''(x_0)-f''(x_0))=0.$

由 $x\to x_0$ 时，$g(x)\to 0$，$h(x)\to 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{h(x)}=0 \Rightarrow g(x)=o(h(x))$

$\exists\delta>0, \forall x\in U(x_0,\delta)$

即 $f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2]=o((x-x_0)^2) \Leftrightarrow$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$

$=\sum\limits_{m=0}^{2}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o((x-x_0)^2).$

同理，对 $\forall n\in N^*$，当 $f^{(n)}(x_0)$ 存在时，$\exists\delta>0$，对 $\forall x\in U(x_0,\delta)$

$f(x)=\sum\limits_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o((x-x_0)^n)$

(六) (1) 设 $f(x)$ 在点 x_0 处 C，若 $f'(x_0)$ 在 x_0 两侧存在且异号，

($f'(x_0)$ 本身可以不存在)，则 $f(x_0)$ 必是极值，此即极值

存在的一阶导判别法；

(2) 若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0(<0)$，则 $f(x_0)$ 必是极小(大)值，此即

极值存在的二阶导判别法；

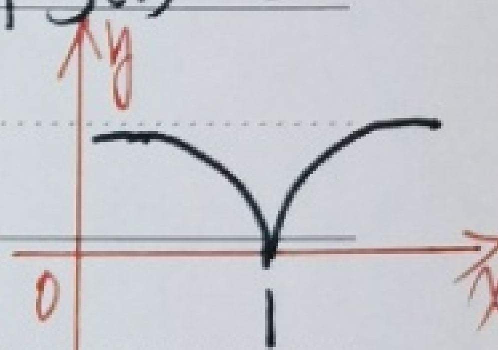
(3) 若 $f'(x_0)=0, f^{(2)}(x_0)=0, \cdots f^{(2n-1)}(x_0)=0, f^{(2n)}(x_0)>0(<0)$，$\forall n\in N^*$

则$f(x_0)$必是极小(大)值，此即极值存在的充分条件判别法。

证(1)：设$f'(x)$在x_0的左侧为正，右侧为负，则$x<x_0$时，$f(x)$严增，$x>x_0$时，$f(x)$严减，且$f(x)$在x_0处C，从而$f(x_0)$必是$f(x)$的一个极大值。

例 设$y=f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$，则$f(x)$在$x=1$处$C$，且$f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$

$f'(1)$不存在，但$x<1$时，$f'(x)<0$，$x>1$时，$f'(x)>0$，从而$f(1)=0$是$f(x)$的极小值，同时$f(1)=0$也是$f(x)$的最小值。



证(2)，已知$f''(x_0)$存在且$f''(x_0)>0\ (<0)$，由(公式1)可知，$\exists\delta>0$，

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$ 即

$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\geq 0\ (\leq 0)$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

$\Leftrightarrow f(x)\geq f(x_0)\ (\leq f(x_0))$，$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$，即$f(x_0)$必是极小(大)值。

证(3)：已知$f^{(2n)}(x_0)$存在，由(公式3)知，$\exists\delta>0$，对$\forall x\in \mathring{U}(x_0,\delta)$

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x-x_0)^{2n-1}+\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}+o((x-x_0)^{2n})$

由$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(2n-1)}(x_0)=0$，$f^{(2n)}(x_0)>0\ (<0)\Rightarrow$

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}+o((x-x_0)^{2n})\geq 0\ (\leq 0),\ \forall x\in U(x_0,\delta)$$

故$f(x_0)$是$f(x)$的极小(大)值.

注：若$f^{(1)}(x_0)=f^{(2)}(x_0)=0$，$f^{(3)}(x_0)>0\ (<0)$，则$M_0(x_0,f(x_0))$处是连续曲线上凹凸部分的分界点，在高数中称$M_0(x_0,f(x_0))$为连续曲线的拐点，在数分中称其中的$x_0$为函数$f(x)$的拐点。

证：由$f^{(3)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0\Rightarrow$

$f_+^{(3)}(x_0)=f^{(3)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0\Rightarrow\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$且$x-x_0>0\Rightarrow f''(x)>0$

$f_-^{(3)}(x_0)=f^{(3)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f''(x)}{x-x_0}>0\Rightarrow\frac{f''(x)}{x-x_0}>0$且$x-x_0<0\Rightarrow f''(x)<0$

即曲线在x_0的左侧是凸的，在x_0的右侧是凸的，且曲线在x_0处连续，故x_0是$f(x)$的一个拐点。

(3) 作业：本讲中的(二)、(三)、(四)、(五)、(六)，提倡一题多解！