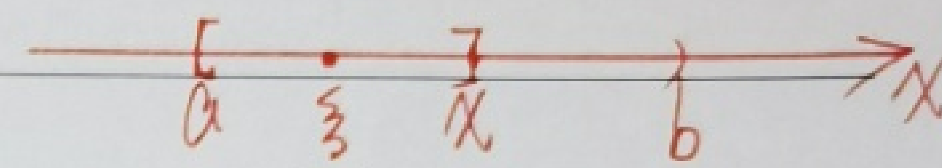
第18讲：洛必达(L'Hospital)法则及其应用

(一) "$\frac{0}{0}$"型的洛必达法则：(以 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\frac{0}{0}$"为例)

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 中可导，且 $g'(x)\neq 0$，而 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\in\mathbb{R}$ 或 $A=\infty$

则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$



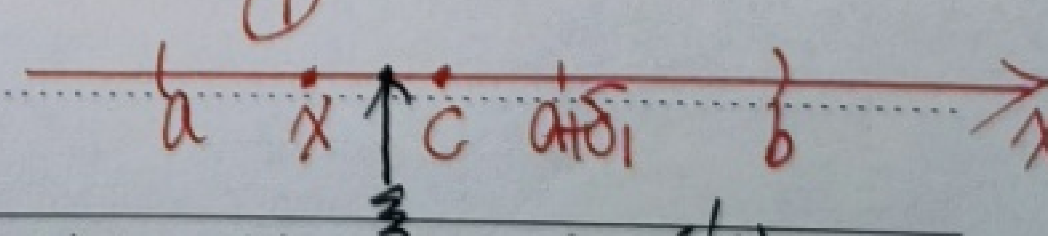
证：(1°) ∵ $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 与 f,g 在 a 点取值无关，∴可设 $f(a)=0$，$g(a)=0$，从而 f,g 在 $[a,x]\subset[a,b)$ 中满足 Cauchy 中值定理的所有条件 $\Rightarrow$

(2°) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{\xi\to a^+}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

(二) "$\frac{*}{\infty}$"型的洛必达法则，(以 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ 为"$\frac{*}{\infty}$"为例)

设 $f(x),g(x)$ 在 (a,b) 中可导，且 $g'(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，$A\in\mathbb{R}$ 或 $A=\infty$. 则 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

证：(1°) 设 $A\in\mathbb{R}$，从 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\Rightarrow\underbrace{\forall\varepsilon>0}_{①}$，$\exists\delta_1>0$，当 $x\in(a,a+\delta_1)\subset(a,b)$ 时，$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon$



取 $[x,c]\subset(a,a+\delta_1)$，则 $A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\overset{\exists\xi\in(x,c)}{=\!=\!=}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon$

(2°) 由 $\lim\limits_{x\to a^+} g(x)=\infty \Rightarrow \exists\,\delta_2>0$，当 $x\in(a,a+\delta_2)\subset(a,b)$ 时，对上述 $\varepsilon>0$，

$\left|\dfrac{f(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$，$\left|\dfrac{g(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ②，则当 $x\in(a,a+\delta)\subset(a,b)$ ③ 时

$A-\varepsilon<\dfrac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}<A+\varepsilon$，$\left|\dfrac{g(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$，$\left|\dfrac{f(c)}{g(x)}\right|<\varepsilon$ 同时成立．此时，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)}+\frac{f(c)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\,\frac{g(x)-g(c)}{g(x)}+\frac{f(c)}{g(x)}$$

$$=\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}-\frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)}\,\frac{g(c)}{g(x)}+\frac{f(c)}{g(x)}<A+\varepsilon+(|A|+\varepsilon)\varepsilon+\varepsilon$$

且 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>A-\varepsilon-(|A|+\varepsilon)\varepsilon-\varepsilon$ 即

$$-(2+|A|+\varepsilon)\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}-A<(2+|A|+\varepsilon)\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|<(2+|A|+\varepsilon)\varepsilon$$ ④

故 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

注(1)：当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍然满足洛必达法则的条件时，

可继续用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}=\cdots$

如：例1 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2}{2e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x}{4e^{2x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{8e^{2x}}=0$

注(2)：当 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在且是振荡不存在时，$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 可能是存在的，即 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=$ 常数。如例2．$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$ 是"$\dfrac{\infty}{\infty}$"型

若用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$ 为振荡不存在

但原极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x}\cos x)=\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cos x$

$=1+0=1$，即原极限收敛，但用洛必达法则后却振荡发散。例3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

但用"$\frac{0}{0}$"型的洛必达法则后，$\lim\limits_{x\to0}\frac{(x^2\sin\frac{1}{x})'}{(x)'}=$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{1}$ 为振荡发散。

因此，无论是"$\frac{0}{0}$"，还是"$\frac{\infty}{\infty}$"中，若 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 或 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$ 为振荡发散 $(n\geq2)$，则宜用别的方法计算 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$，洛必达法则此时不能用！

(三) 洛必达法则的应用举例：

计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$；(2) $\lim\limits_{x\to1^+}(\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{1-x})$，(3) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$

(4). $\lim\limits_{x\to0^+}x^x$ (5) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{\ln x}}$. (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}$ $(a>1,\alpha>0)$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^\alpha}$ $(\forall m>0,\forall\alpha>0)$、(8). $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$，$(n\in N^*,\alpha>0)$

解(1). 这是"$\infty\cdot0$"型，可化为"$\frac{1}{0}\cdot0=\frac{0}{0}$"型.

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=1.$

解(2). $x\to1^+$ 时, $\dfrac{1}{\ln x}\to+\infty$, $\dfrac{1}{1-x}\to-\infty$, 故(2)是

"$\infty-\infty$"型. $\underbrace{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}_{\infty-\infty}=\dfrac{1}{0_1}-\dfrac{1}{0_2}=\dfrac{0_2-0_1}{0_2 0_1}=\dfrac{0}{0}$

原式 $=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x+\ln x}{(1-x)\ln x}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1+\frac{1}{x}}{-\ln x+\frac{1-x}{x}}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x}{1-x-(\ln x)x}$

$\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{-1}{-1-\frac{1}{x}x-\ln x}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{2+\ln x}=\dfrac{1}{2+0}=\dfrac{1}{2}.$

解(3). 这是"1^∞"型, 而 $1^\infty=e^{\infty\ln1}=e^{\infty\cdot0}=e^{\frac{1}{0}\cdot0}=e^{\frac{0}{0}}$

原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}$

$e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{2x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}}\xlongequal{\because\sin x\sim x}$

$e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{6x^2}}\xlongequal{\sin x\sim x}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-x^2}{6x^2}}=e^{-\frac{1}{6}}.$

解(4). 这是"0^0"型, 而 $0^0=e^{0\ln0}=e^{0(-\infty)}=e^{0\cdot\frac{1}{0}}=e^{\frac{0}{0}}.$

原式 $=e^{\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}\xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0^+}(-x)}=e^0=1.$

解(5). 这是"∞^0"型，即$\infty^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}=e^{\frac{0}{0}}$

原式$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}}\xrightarrow[\text{法则}]{\text{洛必达}}e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}}=e^0=1.$

解(6). 这是幂无穷大与指数无穷大的比较问题.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}\xrightarrow[\text{法则}m\text{次}]{\text{连用洛必达}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-m+1)x^{\alpha-m}}{a^x(\ln a)^m}$

因$\alpha>0$是常数，故必有$m\in N^*$，使$\alpha-m\le0$，从而$\frac{x^{\alpha-m}}{a^x}\xrightarrow{x\to+\infty}0$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0$，即$x$充分大时，$a^x>>x^\alpha$.（$\forall a>1,\forall\alpha>0$）

解(7). $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^\alpha}\xrightarrow[\text{法则}n\text{次}]{\text{连用洛必达}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(\ln x)^{m-n}}{\alpha^n x^\alpha}$

因$m>0$是常数，必有$n\in N^*$，使$m-n\le0$，从而$\frac{(\ln x)^{m-n}}{x^\alpha}\xrightarrow{x\to+\infty}0$

故$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^m}{x^\alpha}=0$，即$x$充分大时，$x^\alpha>>(\ln x)^m$（$\forall\alpha>0,\forall m>0$）

$\begin{cases} x\text{充分大时，}x^x>>a^x>>x^\alpha>>(\ln x)^m \quad (\forall a>1,\alpha>0,m>0) \\ n\text{充分大时，}n^n>>n!>>a^n>>n^\alpha>>(\ln n)^m \quad (\forall a>1,\alpha>0,m>0) \end{cases}$

解(8): 因$n\in N^*$，$\ln n$与n^α都不C，从而不可导，不能直接

使用洛必达法则，但可先计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}$，$x\in R$.

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha} \xlongequal[\text{法则}]{\text{洛必达}} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$

而对 $\forall n\in N^*$，$\exists x>0$，使 $x\le n<x+1 \Rightarrow \ln x\le \ln n<\ln(x+1)$

$\frac{\ln x}{(x+1)^\alpha}\le\frac{\ln n}{n^\alpha}\le\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}$ 而 $\frac{\ln x}{(x+1)^\alpha}=\frac{\ln x}{x^\alpha}\cdot\frac{x^\alpha}{(x+1)^\alpha}$

且 $\frac{\ln x}{x^\alpha}\longrightarrow 0$，$\frac{x^\alpha}{(x+1)^\alpha}\longrightarrow 1\ (x\to+\infty)$，即 $\frac{\ln x}{(x+1)^\alpha}\xrightarrow{x\to+\infty} 0\times 1=0$

$\frac{\ln(x+1)}{x^\alpha}=\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^\alpha}\cdot\frac{(x+1)^\alpha}{x^\alpha}\xrightarrow{x\to+\infty} 0\times 1=0$，且 $x\to+\infty \Leftrightarrow n\to\infty$

$\therefore \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}=0$

同理，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0\ (n\in N^*, k>0, a>1)$ 即 $a^n>>n^k$（充分大）

(四)作业：ex3,4

3；4（提示：对 $F(x)=\frac{f(x)}{x}$，$G(x)=\frac{1}{x}$ 在 $[a,b]$ 上应用Cauchy Th）；

5/(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，ch3综/13.