第17讲：微分中值定理及应用习题课

(一) 达布(Darboux) Th 及其证明：设 $f(x)$ 在 (a,b) 中可导，则

(1). $f'(x)$ 在 (a,b) 中无第一类间断点；

(2). 即使 $f'(x)$ 在 (a,b) 中不C，$f'(x)$ 在 (a,b) 中也具有零值性与介值性；

(3). 若 $f'(x)\neq 0$，$\forall x\in(a,b)$，则 $f'(x)>0$，$\forall x\in(a,b)$（严格增）或 $f'(x)<0$，$\forall x\in(a,b)$（严格减）.

(二) 证明题：

(1). $f(x)$ 在区间 I 上为常值函数 $\Longleftrightarrow f'(x)\equiv 0$，$\forall x\in I$；

(2). 若 $f'(x)>0\ (<0)$，$\forall x\in I$，则 $f(x)$ 在 I 上严格增(减)；

(三) 证明题：

(1). 若 f 在 x_0 处C，且 $f'(x)$ 在 x_0 两侧异号，($f'(x_0)$ 可以不存在)，则 $f(x_0)$ 必为 f 的极值；

(2). 若 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)>0\ (<0)$，则 $f(x_0)$ 必为 f 的极小(大)值；

(3). 若 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f^{(3)}(x_0)\neq 0$，则 $f(x_0)$ 不是 f 的极值.

(四). 不等式证明题:

(1). $\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$, $\forall\ 0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$;

(2). $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $\forall x>0$;

(3). $\tan x>x-\frac{1}{3}x^3$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$;

(4). $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x$; $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$, $\cdots$ $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

(五). 求 $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在 $[-2,2]$ 上的最大值与最小值。

证(一)/(1). 用反证法: 若 $x_0\in(a,b)$ 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点, 则 $f'(x_0-0)$, $f'(x_0+0)$ 都存在, 且 $f'(x_0)$ 也存在, 此时.

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f'(\xi)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}=\lim_{\xi\to x_0^-}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=f'(x_0-0)$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(\xi)\cancel{(x-x_0)}}{\cancel{x-x_0}}=\lim_{\xi\to x_0^+}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x)=f'(x_0+0)$$

而 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=f'(x_0)\Rightarrow f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0)$, 即 $f'(x)$ 在 x_0 处 C, 与假设 x_0 是 $f'(x)$ 的一个第一类间断点矛盾!

故 导函数 $f'(x)$ 在 (a,b) 中不可能有第一类间断点。

(2).

换言之，$f'(x)$在(a,b)中或者处处连续，或者有第二类间断点。

由此可断言，不存在$(-\infty,+\infty)$上的可导函数$f(x)$，使$f'(x)=\operatorname{sgn}x$。

因为$\operatorname{sgn}x$在$x=0$处有第一类间断点。

证(2)：若有$[c_1,c_2]\subset(a,b)$使$f'(c_1)\cdot f'(c_2)<0$，不妨设$\begin{cases}f'(c_1)>0\\ f'(c_2)<0\end{cases}$

则$f'_+(c_1)=f'(c_1)=\lim\limits_{x\to c_1^+}\dfrac{f(x)-f(c_1)}{x-c_1}>0$，从$x-c_1>0$知，$f(x)-f(c_1)>0$；

从$f'_-(c_2)=f'(c_2)=\lim\limits_{x\to c_2^-}\dfrac{f(x)-f(c_2)}{x-c_2}<0$及$x-c_2<0$知$f(x)-f(c_2)>0$.

从而f在$[c_1,c_2]$上的最大值必在(c_1,c_2)中的某点x_0处取到.

$f(x_0)$也必是f的一个极大值，且$f'(x_0)$存在，依Fermat Th，$f'(x_0)=0$.

即$\exists f'(x)$的一个零点$x_0\in(c_1,c_2)\subset(a,b)$，使$f'(x_0)=0$；

同理，若$\exists\lambda$，使$f(c_1)<\lambda<f(c_2)$或$f(c_1)>\lambda>f(c_2)$，$[c_1,c_2]\subset(a,b)$

只要令$g(x)=f(x)-\lambda x$，$x\in[c_1,c_2]$，则$g(x)$在(a,b)中可导，且

$g'(c_1)=f'(c_1)-\lambda<0$，$g'(c_2)=f'(c_2)-\lambda>0$，$\Rightarrow\exists x_0\in(c_1,c_2)\subset(a,b)$

使$g'(x_0)=0\Rightarrow f'(x_0)-\lambda=0\Rightarrow f'(x_0)=\lambda$，这即导函数$f(x)$具有介值性。

证(一)/(3). 用反证法：若 $\exists c_1, c_2 \in (a,b)$，使 $f'(c_1) \cdot f'(c_2) < 0$，

则必有 $x_0 \in (c_1, c_2) \subset (a,b)$，使 $f'(x_0) = 0$，与 $f'(x) \neq 0$，$\forall x \in (a,b)$ 矛盾！

故当 $f'(x) \neq 0$，$\forall x \in (a,b)$ 时，或者 $f'(x) > 0$ 恒成立，或者 $f'(x) < 0$ 恒成立。

无论哪种情形，$y = f(x)$ 在 (a,b) 中都存在可导的反函数

$x = \varphi(y)$，则 $\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 或者 $f'(x) \cdot \varphi'(y) \equiv 1$.

证(三)/(1) "$\Rightarrow$" 已知 $f(x) \equiv C$，C 为常数，$x \in I$，则 $f'(x) = (C)' \equiv 0$，

$\forall x \in I$；"$\Leftarrow$" 已知 $f'(x) \equiv 0$，$\forall x \in I$，在 I 中任取 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$.

在 $[x_1, x_2]$ 中对 f 应用 Lagrange 中值定理：$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

$= 0(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow f(x_2) = f(x_1)$，依 x_1, x_2 在 I 中的任意性知，

$f(x) \equiv C$. $\forall x \in I$. 上述的 $\xi \in (x_1, x_2)$.

证(三)/(2)：设 $f'(x) > 0$，$\forall x \in I$. 在 I 中任取 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$，

则 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$，从 $f'(\xi) > 0$，$(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow$

$f(x_2) > f(x_1)$，由 x_1, x_2 在 I 中任意性及 $x_1 < x_2$ 知，$f(x)$ 在 I 中严增。

证(1) 不妨设 $f'(x)$ 在 x_0 左侧为负，右侧为正，

则 $f(x)$ 在 x_0 的左侧严减，在 x_0 的右侧严增，且 f 在 x_0 处

C，从而 $f(x_0)$ 是 f 的一个极小值。如 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处 C

且 $x<0$ 时，$f'(x)=-1<0$，$x>0$ 时，$f'(x)=1>0$，但 $f'(0)$ 不存在，

依然可推知，$f(0)=0$ 是 f 的极小值，也是 f 的最小值。

证(2)：$\because f''(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$

当 $x>x_0$ 时 从 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$；当 $x<x_0$ 时

从 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$，且 f 在 x_0 处 C，依(1)知

$f(x_0)$ 是 f 的一个极小值。

证(2)：不妨设 $f^{(3)}(x_0)>0$，则从 $f^{(3)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}>0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0 \Rightarrow f''(x)>0$ 即 $(f'(x))'>0 \Rightarrow f'(x)$ 在 x_0 右侧严增，

即 $x_0<x$ 时，$f'(x_0)<f'(x)$ 而 $f'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$ 在 x_0 右侧

严增；再从 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0 \Rightarrow f''(x)<0$ 即 $f'(x)$ 在 x_0 左侧严减，

即 $x<x_0$ 时，$f'(x)>f'(x_0)=0$，$\Rightarrow f(x)$ 在 x_0 的左侧严增。(5).

$f(x)$ 在 (x_0,δ) 且在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 中严格增，故 $f(x_0)$ 不是 f 的极值。

证(四)(1)：设 $f(x)=\tan x$，$x\in[\alpha,\beta]\subset(0,\frac{\pi}{2})$

在 $[\alpha,\beta]$ 上对 $\tan x$ 应用 Lagrange 中值 th，$\exists\xi\in(\alpha,\beta)\subset(0,\frac{\pi}{2})$

使 $\tan\beta-\tan\alpha=(\tan x)'|_{x=\xi}\cdot(\beta-\alpha)=(\sec^2\xi)(\beta-\alpha)=\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\xi}$

即 $\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\cos^2\xi}$. 由 $\alpha<\xi<\beta\Rightarrow\cos^2\alpha>\cos^2\xi>\cos^2\beta$

$\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{1}{\cos^2\xi}<\frac{1}{\cos^2\beta}\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}<\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\beta-\alpha}<\frac{1}{\cos^2\beta}\Leftrightarrow$

$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

证(四)(3)：令 $f(x)=\tan x-x+\frac{1}{3}x^3$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $f(0)=0$

且 $f'(x)=(\sec^2x-1)+x^2=\tan^2x+x^2>0$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 即当

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f(0)<f(x)$ 恒成立 即 $\tan x-x+\frac{1}{3}x^3>f(0)=0$

恒成立 $\Rightarrow\tan x>x-\frac{1}{3}x^3$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中恒成立。

证(四)(4)：(1°) 令 $g(x)=x-\sin x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $g(0)=0$，

且 $g'(x)=1-\cos x>0$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$，∴当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$0=g(0)<g(x)\Rightarrow x-\sin x>0\Rightarrow x>\sin x$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(2) 令 $f(x)=\sin x-(x-\frac{x^3}{3!})$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $f(0)=0$ 且

$f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2!}$，$f''(x)=-\sin x+x>0$，$\forall\, 0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$f'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中严格增 $\Rightarrow$ $0=f'(0)<f'(x)$，$\forall\, 0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$

$f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中严格增，即当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$0=f(0)<f(x)\Rightarrow$

$\sin x-(x-\frac{x^3}{3!})>0$ 恒成立 $\Rightarrow$ $x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x$，$\forall x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

(3) 令 $h(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\sin x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2})$，则 $h(0)=0$ 且当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，

$h'(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cos x$，$h''(x)=-x+\frac{x^3}{3!}+\sin x=\sin x-(x-\frac{x^3}{3!})>0$

即 $h'(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中严格增：$0=h'(0)<h'(x)\Rightarrow h(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中严格增.

$\Rightarrow$ 对 $\forall\, 0<x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0=h(0)<h(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\sin x$. 故当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$x-\frac{x^3}{3!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$，同理，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，

$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}$，…这样的不等式

有无数个。

第(5) $\because f$ 在 $[-2,2]$ 上 C，$\therefore f$ 在 $[-2,2]$ 上的最值必存在，先求出

f 在 $(-2,2)$ 中的所有极值，再与端点值 $f(\pm2)$ 比较大小即可

令 $f'(x)=4x^3-4x=0$，求出所有驻点：$x_1=-1, x_2=0, x_3=1$

而 $f''(x)=12x^2-4$，$f''(-1)=8>0$，$f''(0)=-4<0$，$f''(1)=8>0$。

∴ $x_1=-1$，$x_3=1$ 是 f 的极小值点，$x_2=0$ 是 f 的极大值点。

比较 $\overset{=13}{f(-2)}$，$\overset{=4}{f(-1)}$，$\overset{=5}{f(0)}$，$\overset{=4}{f(1)}$，$\overset{=13}{f(2)}$ 的大小知 f 在 $[-2,2]$ 上

最大值为13，最小值为4。

(六) 补充习题。证明：二次曲线：$ax^2+by^2+cx+dy+e=0$

上点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程为：

$$axx_0+byy_0+c\frac{x+x_0}{2}+d\frac{y+y_0}{2}+e=0$$

其中，a,b,c,d,e 均为常数且 $a^2+b^2\neq 0$。

(七) 作业：ex3.3：

1；2；4(1)；5(1)；15；19(2)；20(1),(4).

证(四)(2)：令 $f(t)=\ln(1+t)$，$t\in[0,x]$，$x>0$。由Lagrange 知：$\exists\, \xi\in(0,x)$，使 $\frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0}=f'(\xi)=\frac{1}{1+\xi}$ 由 $0<\xi<x$

$\Rightarrow 1<1+\xi<1+x \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1 \Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1 \Rightarrow$ (8)

$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$，$\forall x>0$.