第15讲：函数的微分(differential)

(一) 定义与性质：

(1) 定义：设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 中有定义，$x_0+\Delta x\in U(x_0,\delta)$.

若 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 可表示为 $A\Delta x+o(\Delta x)$，其中A是与Δx无关的常数，即 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$，则称 $f(x)$ 在点x_0处可微，且将Δy的线性主部$A\Delta x$称为$f(x)$在点x_0处的微分，记作 $dy|_{x_0}=A\Delta x$ 或 $df(x)|_{x_0}=A\Delta x$.

若 $y=f(x)$ 在区间I上每一点x都可微，则称$f(x)$在区间I上可微，此时，$df(x)=A\Delta x$，$x\in I$。

Th1：$y=f(x)$在点x_0处可微$\Longleftrightarrow f(x)$在x_0处可导.

证 "$\Longrightarrow$" 已知$f(x)$在x_0处可微$\Longrightarrow \Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)\Longrightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A+0=A=f'(x_0)\Longrightarrow f(x)$在$x_0$处可导，且$f'(x_0)=A$. 即 $df(x)|_{x_0}=A\Delta x=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)(x-x_0)$

"$\Longleftarrow$" 已知$f(x)$在x_0处可导$\Longrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$

且 $f'(x_0)$ 存在，$\Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x)$，$\alpha(x) \to 0$ $(\Delta x \to 0)$

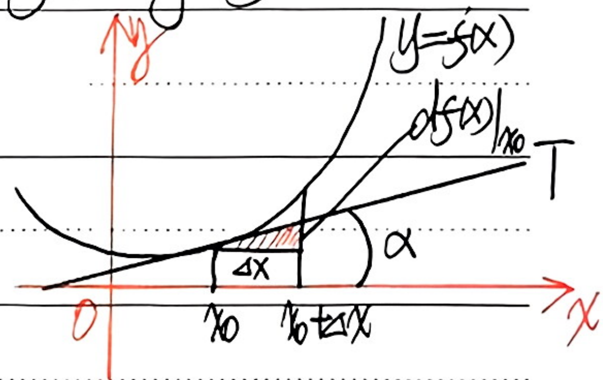
$\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \Delta x\,\alpha(x)$，$\because \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x\,\alpha(x)}{\Delta x} = 0$，$\therefore \Delta x\,\alpha(x) = o(\Delta x)$

即有：$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) = A\Delta x + o(\Delta x)$，$A = f'(x_0)$，从而

$f(x)$ 在 x_0 处可微 且 $df(x)\big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x$.

由 $df(x) = f'(x)\Delta x \Longrightarrow dx = (x)'_x \Delta x = 1 \cdot \Delta x$，即自变量的微分等于自变量的增量。于是 $df(x) = dy = f'(x)dx$ (*1)

(2) 微分 $df(x)\big|_{x_0}$ 的几何意义：



由 $df(x)\big|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x = (\tan\alpha)\Delta x$ 知，

$df(x)\big|_{x_0} = dy\big|_{x_0}$ 是切线T在点 x_0 处的增量。

$\tan\alpha = f'(x_0)$

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x = df(x)\big|_{x_0}$ 表明：

曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处的增量 Δy，在局部可用相应切线T上的增量 $f'(x_0)\Delta x = f'(x_0)(x-x_0)$ 代替，也即"局部线性化"。

(3)，从 $df(x) = f'(x)dx$ 及导数的四则运算法则可得以下的微分四则运算法则：

(2).

设 $u(x)$, $v(x)$ 都在区间 I 上可微, C_1, C_2 为任意常数, 则

(1). $d(C_1u(x)+C_2v(x))=C_1du(x)+C_2dv(x)$.

(2). $d(u(x)v(x))=v(x)du(x)+u(x)dv(x)$

(3) $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$, $(v(x)\neq 0)$.

证(1): $d(C_1u(x)+C_2v(x))=(C_1u(x)+C_2v(x))'dx=(C_1u'(x)+C_2v'(x))dx$

$=C_1u'(x)dx+C_2v'(x)dx=C_1du(x)+C_2dv(x)$.

证(3): $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'dx=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}dx=\frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{v^2(x)}$.

Th2: 设 $y=f(u)$ 可微, 则无论 u 是自变量, 还是中间变量,

总有: $df(u)=f'(u)du$.　　(※).

Th2. 又称为一阶微分形式不变性。

证Th2: (1°) 当 u 是自变量时, 从(※)即有 $df(u)=f'(u)du$;

(2°) 当 u 是中间变量时, 设 $y=f(u)$ 可微, $u=g(x)$ 可微, 且

$f(g(x))$ 有意义, 则 $y=f(g(x))$ 的微分: $dy=(f(g(x)))'_x dx$

$=f'(u)\cdot g'(x)dx=f'(u)du$, 即 u 是中间变量时, (3)得证.

$df(u)=f'(u)du$.

(二) 18个微分基本公式（a,α,C为常数，u是自变量或中间变量）

(1). $d(C)=0\cdot du$，(2). $d(u^{\alpha})=\alpha u^{\alpha-1}du$，(3) $d(a^u)=a^u\ln a\,du$

(4). $d(e^u)=e^u du$. (5). $d(\ln u)=\frac{du}{u}$，(6). $d(\log_a u)=\frac{1}{u\ln a}du$.

(7) $d(\sin u)=\cos u\,du$，(8) $d(\cos u)=-\sin u\,du$，(9) $d(\tan u)=\sec^2 u\,du$，

(10) $d(\cot u)=-\csc^2 u\,du$，(11) $d(\sec u)=\sec u\tan u\,du$，(12) $d(\csc u)=-\csc u\cot u\,du$

(13) $d(\arcsin u)=\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$，(14) $d(\arccos u)=\frac{-du}{\sqrt{1-u^2}}$，(15) $d(\arctan u)=\frac{du}{1+u^2}$，

(16) $d(\text{arccot}\, u)=\frac{-du}{1+u^2}$，(17) $d(\text{sh}\, u)=\text{ch}\, u\,du$，(18) $d(\text{ch}\, u)=\text{sh}\, u\,du$.

(三) 例题：

(1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$

(2) 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$.

解(1)：方法二：两边微分：$d(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2))=d(\arctan\frac{y}{x})\Rightarrow$

$\frac{1}{2}\frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\frac{d(\frac{y}{x})}{1+(\frac{y}{x})^2}\Rightarrow\frac{1}{2}\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=\frac{xdy-ydx}{x^2}\Big/\frac{x^2+y^2}{x^2}$

(4)

$$\Rightarrow \frac{xdx+ydy}{\cancel{x^2+y^2}} = \frac{xdy-ydx}{\cancel{x^2+y^2}} \Rightarrow (y-x)dy = -(x+y)dx \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{y+x}{y-x}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{y+x}{y-x}\right)'_x = -\frac{(y'_x+1)(y-x)-(y'_x-1)(y+x)}{(y-x)^2} =$$

$$-\frac{-2xy'_x+2y}{(y-x)^2} = \frac{2x\frac{-(y+x)}{(y-x)}-2y}{(y-x)^2} = -2(x^2+y^2)/(y-x)^3.$$

方法(二)：方程 $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)=\arctan\frac{y}{x}$ 两边对 x 求导：

$$\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'_x}{x^2+y^2} = \frac{\frac{xy'_x-(y)}{x^2}}{1+(\frac{y}{x})^2} \Rightarrow \frac{x+yy'_x}{\cancel{x^2+y^2}} = \frac{xy'_x-y}{\cancel{x^2+y^2}} \Rightarrow$$

$(y-x)y'_x = -(x+y) \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{x+y}{y-x}$，余同上。

解(2)：方法(一)：$\because x=\cos^3 t \Rightarrow x'_t = 3\cos^2 t(-\sin t) < 0$，$t\in(0,\frac{\pi}{2})$

$\therefore x=\cos^3 t$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 中有反函数，且反函数 $t=g(x)$ 的导

数 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{-3\cos^2 t\sin t}$，于是从 $y=\sin^3 t$ 知 y 是 t

的函数，而从 $t=g(x)$ 知，t 是中间变量，y 是 x 的复合

函数：$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\sin^3 t)'_t}{(\cos^3 t)'_t}$

$$= \frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t} = -\tan t = \frac{dy}{dx}，\text{而} \frac{d^2y}{dx^2} = -(\tan t)'_x$$

$$= -(\tan t)'_t \cdot t'_x = -(\tan t)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{-\sec^2 t}{-3\cos^2 t\sin t} = \frac{1}{3\cos^4 t\sin t}.$$

(5)

方法(二): $\because \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'_t\,dt}{x'_t\,dt}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{(\sin^3 t)'_t}{(\cos^3 t)'_t}=\dfrac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t$, $\therefore \dfrac{d^2y}{dx^2}=-(\tan t)'_x=\dfrac{1}{3\cos^4 t\sin t}$.

例(3). 设 $y=e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}$, 求 dy 及 $\dfrac{dy}{dx}$

解: $dy=d\left(e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}\right)=e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}d\left(-\arctan^3\frac{1}{x^2}\right)$

$=e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}\left(-3\arctan^2\frac{1}{x^2}\right)d\left(\arctan\frac{1}{x^2}\right)$

$=-3e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}\left(\arctan^2\frac{1}{x^2}\right)\dfrac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}$

$=-3e^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}\left(\arctan^2\frac{1}{x^2}\right)\dfrac{\frac{-2x\,dx}{x^4}}{\frac{x^4+1}{x^4}}$

$=6xe^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}\left(\arctan^2\frac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^4+1}dx$

$\dfrac{dy}{dx}=6xe^{-\arctan^3\frac{1}{x^2}}\left(\arctan^2\frac{1}{x^2}\right)\dfrac{1}{x^4+1}$.

四、作业:

ex3.2 / 2(2),(3),(4),(5),(6); 3(1),(3); 4. ch3综/2.

第16讲: 微分中值定理及其应用

附: 函数极限之Cauchy准则 (即Th1.36)

函数极限的Cauchy准则：(设 $x_0\in R$)

设 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，则 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，对 $\forall x_1,x_2\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ 恒成立。

先证"必要性"，已知 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在，设 $\lim_{x\to x_0}f(x)=A\in R$，则对

$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，对 $\forall x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有 $|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$。当 $x_1,x_2\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，

$|f(x_1)-f(x_2)|=|f(x_1)-A+A-f(x_2)|\le|f(x_1)-A|+|f(x_2)-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

必要性得证。

再证"充分性"，已知对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall x_1,x_2\in\mathring{U}(x_0,\delta)$，有

$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，现取 $a_n\to x_0\ (n\to\infty)$ 且 $a_n\ne x_0$，对上述 $\delta>0$，$\exists m_0\in N^*$

当 $m>n>m_0$ 时，$0<|a_m-x_0|<\delta$，$0<|a_n-x_0|<\delta$，即 $a_m,a_n\in\mathring{U}(x_0,\delta)$

所以 $|f(a_m)-f(a_n)|<\varepsilon$，从上述的①,②,③,④及数列极限的

Cauchy准则知，$\lim_{n\to\infty}f(a_n)$ 存在，设 $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=A\in R$，

下证：$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$，即 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在且等于A。

(1).

对 $\forall \varepsilon>0$，由完备性的已知条件知，$\exists \delta>0$，只要 $x_1, x_2 \in \mathring{U}(x_0,\delta)$，

就有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}$。

另外，从 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=A$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$ 知，$\exists n_0 \in N^*$

使 $0<|a_{n_0}-x_0|<\delta$，从而对 $\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta$，$\Rightarrow a_{n_0}, x \in \mathring{U}(x_0,\delta)$，

$\Rightarrow |f(a_{n_0})-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$，而且还有 $|f(a_{n_0})-A|<\frac{\varepsilon}{2}$ 同时成立。

于是，$|f(x)-A| \le |f(x)-f(a_{n_0})|+|f(a_{n_0})-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。

从逻辑的①，②③④可知，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

注：ex2.2 的第13题、第14题都可利用函数极限的Cauchy准则来解答。