第14讲：函数 $f(x)$ 的高阶导数 $f^{(n)}(x)$，$n\geq 2, n\in N^*$.

(一) 高阶导数的定义、记号与运算性质：

(1). $f''(x)=(f'(x))'\triangleq \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}\triangleq f^{(2)}(x)\triangleq \frac{d^2y}{dx^2}$；

(2). $f'''(x)=(f''(x))'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f''(x+\Delta x)-f''(x)}{\Delta x}\triangleq f^{(3)}(x)\triangleq \frac{d^3y}{dx^3}$；

(3). $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}\triangleq \frac{d^ny}{dx^n}$，$n=2,3,4,\cdots$

规定 $f^{(0)}(x)$ 为 $f(x)$ 本身，且二阶及以上的导数叫作高阶导数。

(二) 高阶导数运算线性性质与Leibniz公式：$(n\geq 2)$

设 $u(x),v(x)$ 皆有 n 阶可导，C_1,C_2 为任意常数，则

(1). $(C_1u(x)+C_2v(x))^{(n)}=C_1u^{(n)}(x)+C_2v^{(n)}(x)$，$n=2,3,4,\cdots$（线性性质），(*1)

(2). $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$，(Leibniz公式)，$n\in N^*$

利用(2)中 u,v 的对称性，Leibniz公式也可写成：

(3). $(u\cdot v)^{(n)}=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$，$n\in N^*$.(*2)

证(*2)：用归纳法证：$n=1$ 时，$(u\cdot v)^{(1)}=u^{(1)}v^{(0)}+u^{(0)}v^{(1)}$
$=C_1^0u^{(1-0)}v^{(0)}+C_1^1u^{(1-1)}v^{(1)}=\sum\limits_{k=0}^{1}C_1^k u^{(1-k)}v^{(k)}$，结论成立

(2°) 设 $n=m$ 时，(式)成立：$(u\cdot v)^{(m)}=\sum_{k=0}^{m} C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)}$，$m\geq 2$.

(3°) 则 $n=m+1$ 时，$(u\cdot v)^{(m+1)}=\left((u\cdot v)^{(m)}\right)'=\sum_{k=0}^{m}\left(C_m^k u^{(m-k)} v^{(k)}\right)'$

$$=\sum_{k=0}^{m} C_m^k \left(u^{(m-k+1)} v^{(k)}+u^{(m-k)} v^{(k+1)}\right)$$

$$=C_m^0 u^{(m+1)} v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m} C_m^k u^{(m+1-k)} v^{(k)}+\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k u^{(m-k)} v^{(k+1)}+u^{(0)} v^{(m+1)}$$

而 $\sum_{k=0}^{m-1} C_m^k u^{(m-k)} v^{(k+1)} \xlongequal{令k+1=\tilde{k}} \sum_{\tilde{k}=1}^{m} C_m^{\tilde{k}-1} u^{(m+1-\tilde{k})} v^{(\tilde{k})}=\sum_{k=1}^{m} C_m^{k-1} u^{(m+1-k)} v^{(k)}$

从而 $(u\cdot v)^{(m+1)}=C_{m+1}^{0} u^{(m+1)} v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m}\left(C_m^k+C_m^{k-1}\right) u^{(m+1-k)} v^{(k)}+C_{m+1}^{m+1} u^{(0)} v^{(m+1)}$

$$=C_{m+1}^{0} u^{(m+1)} v^{(0)}+\sum_{k=1}^{m} C_{m+1}^k u^{(m+1-k)} v^{(k)}+C_{m+1}^{m+1} u^{(0)} v^{(m+1)}$$

$$=\sum_{k=0}^{m+1} C_{m+1}^k u^{(m+1-k)} v^{(k)}$$，即(式)在 $n=m+1$ 时也成立，由归纳法知，(式)对 $\forall n\in N^*$ 都成立。

E) n 阶常用初等函数导数公式：$(n\in N^*)$

(1). $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(\frac{n}{2}\pi+x\right)$；$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(\frac{n}{2}\pi+x\right)$，$x\in R$.

(2). $(e^x)^{(n)}=e^x$，$(a^x)^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

(3). $\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$，$(\ln(x+a))^{(n)}=\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n-1)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+a)^n}$.

(4). $(x^m)^{(n)}=\begin{cases}0 & n>m\\ n! & n=m\\ m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}, & (n<m)\end{cases}$ (2).

证 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(\frac{n}{2}\pi+x\right)$，$n\in N^*$，$x\in R$.

用归纳法证：1°) $n=1$ 时，$(\sin x)^{(1)}=\cos x=\sin\left(\frac{1}{2}\pi+x\right)$，结论成立，

2°) 设 $n=m$ 时，结论成立：$(\sin x)^{(m)}=\sin\left(\frac{m}{2}\pi+x\right)$.

3°) $n=m+1$ 时，$(\sin x)^{(m+1)}=\left((\sin x)^{(m)}\right)'=\left(\sin\left(\frac{m}{2}\pi+x\right)\right)'=\cos\left(\frac{m}{2}\pi+x\right)\cdot 1$

$=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{m}{2}\pi+x\right)=\sin\left(\frac{m+1}{2}\pi+x\right)$，$n=m+1$ 时结论仍成立.

由归纳法知 $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(\frac{n}{2}\pi+x\right)$，$\forall n\in N^*$，$\forall x\in R$.

其余那几个的导数公式也都可用归纳法进行证明。

(三) 例题：

例1. $P_n(x)\triangleq\frac{1}{2^n n!}\left((x^2-1)^n\right)^{(n)}$，$n\in N$，称之为 n 次勒让德 (Legendre) 多项式. 证明：$P_n(x)$ 是下列 n 阶 Legendre 方程：

$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0$ 的解。

例2. 设 $y=\arctan x$，求 $y^{(n)}(0)$，$y^{(98)}(0)$，$y^{(99)}(0)$.

例3. 求 $f^{(n)}(x)$. (1). $f(x)=\frac{1}{x^2+10x+25}$，(2). $f(x)=(4x^2+5x+1)\cos x$

(3).

证例1：设 $y=(x^2-1)^n$，则 $y'=n(x^2-1)^{n-1}2x$，

$(x^2-1)y'=n(x^2-1)^n 2x=2nxy$，两边对 x 求 $n+1$ 阶导数：

$C_{n+1}^0(x^2-1)^{(0)}(y')^{(n+1)}+C_{n+1}^1(x^2-1)^{(1)}(y')^{(n)}+C_{n+1}^2(x^2-1)^{(2)}(y')^{(n-1)}+0+0+\cdots+0=(2nxy)^{(n+1)}$

$=C_{n+1}^0(2nx)^{(0)}y^{(n+1)}+C_{n+1}^1(2nx)^{(1)}y^{(n)}+0+0+\cdots+0\Rightarrow$

$(x^2-1)(y^{(n)})''+(n+1)2x(y^{(n)})'+\frac{(n+1)n}{2!}\times 2!\,y^{(n)}=2nx(y^{(n)})'+2n(n+1)y^{(n)}\Rightarrow$

$(x^2-1)(y^{(n)})''+2x(y^{(n)})'-n(n+1)y^{(n)}=0\Rightarrow$

$(x^2-1)\left(\frac{y^{(n)}}{2^n n!}\right)''+2x\left(\frac{y^{(n)}}{2^n n!}\right)'-n(n+1)\left(\frac{y^{n}}{2^n n!}\right)=0$ 而 $\frac{y^{(n)}}{2^n n!}=P_n(x)$

$\therefore (x^2-1)(P_n(x))''+2x(P_n(x))'-n(n+1)P_n(x)=0$ 即 $P_n(x)$ 满足

Legendre方程：$(x^2-1)y''+2xy'-n(n+1)y=0$，从而 $P_n(x)$ 是

Legendre方程的一个解。

解例2：由 $y=\arctan x\Rightarrow y'=\frac{1}{1+x^2}$，$\Rightarrow(x^2+1)y'=1$，两边

对 x 求 n 阶导：$((x^2+1)y')^{(n)}=C_n^0(x^2+1)^{(0)}(y')^{(n)}+C_n^1(x^2+1)^{(1)}(y')^{(n-1)}+$

$C_n^2(x^2+1)^{(2)}(y')^{(n-2)}=1^{(n)}=0\Rightarrow(x^2+1)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0$

令 $x=0$ 得：$y^{(n+1)}(0)+0\,y^{(n)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0$

$\Rightarrow y^{(n+1)}(0) = -n(n-1)y^{(n-1)}(0)$, $n=1,2,3,\cdots$ 且 $\begin{cases} y^{(0)}(0)=0 \\ y^{(1)}(0)=1 \end{cases}$

$\Rightarrow y^{(2)}(0) \overset{n=1}{=\!=} -1\times 0\, y^{(0)}(0) = 0$; $y^{(4)}(0) \overset{n=3}{=\!=} -3\times 2\, y^{(2)}(0) = 0$,

$y^{(6)}(0) \overset{n=5}{=\!=} -5\times 4\, y^{(4)}(0) = 0, \cdots, y^{(2m)}(0) \equiv 0$, $m=0,1,2,3,\cdots$

$y^{(3)}(0) \overset{n=2}{=\!=} -2\times 1\, y^{(1)}(0) = -2!\times 1 = -2!$, $y^{(5)}(0) \overset{n=4}{=\!=} -4\times 3\, y^{(3)}(0)$

$= -4\times 3\times(-2!) = 4!$; $y^{(7)}(0) = y^{(2\times 3+1)}(0) = -6\times 5\, y^{(5)}(0) = -6\times 5\times 4!$

$= -6!$, $y^{(9)}(0) = y^{(2\times 4+1)}(0) \overset{n=8}{=\!=} -8\times 7\, y^{(7)}(0) = -8\times 7(-6!) = 8! \cdots$

$y^{(2m+1)}(0) = (-1)^m (2m)!$, $m=0,1,2,3,\cdots \Rightarrow \begin{cases} y^{(98)}(0) = 0 \\ y^{(99)}(0) = (-1)^{49}(98)! = -98! \end{cases}$

~~编号~~例3(1). $\because f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+5)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+5}\right)$, $\therefore f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x+5}\right)^{(n)}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+5)^{n+1}}\right)$

(2): $f^{(n)}(x) = C_n^0 (4x^2+5x+1)(\cos x)^{(n)} + C_n^1 (4x^2+5x+1)^{(1)}(\cos x)^{(n-1)} + C_n^2 (4x^2+5x+1)^{(2)}(\cos x)^{(n-2)}$

$= (4x^2+5x+1)\cos\left(\frac{n}{2}\pi + x\right) + n(8x+5)\cos\left(\frac{n-1}{2}\pi + x\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\times 8\cos\left(\frac{n-2}{2}\pi + x\right)$

(五) 作业: ex3.1:

7/(3), (12), 14; 18; 19; 20; 21; 22.