第13讲：求导运算习题课

(一) 求下列函数的导数：$\left(x^{x^x}+a^{x^x}+x^{a^x}+a^{x^a}+a^{a^x}+a^{a^a}\right)'$ $(a>0, x>0)$

(1) 设 $u(x), v(x)$ 皆可导，且 $u(x)>0$，$y=u(x)^{v(x)}$，求 $\frac{dy}{dx}$；

(2) 求 $y=xe^x$ 的反函数的导数 $\frac{dx}{dy}$.

解(1)：方法一：$\because y=e^{v(x)\ln u(x)}=e^{w(x)}$，$w(x)=v(x)\ln u(x)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\left(e^{w(x)}\right)'_w\cdot\left(v(x)\ln u(x)\right)'_x=e^w\cdot\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

$=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

方法二：$y=u(x)^{v(x)}$ 两边取对数：$\ln y=v(x)\ln u(x)$，两边对 x 求导

$\frac{1}{y}\cdot y'_x=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\Rightarrow y'_x=\frac{dy}{dx}=y\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$

解(2)：$\because y'=(xe^x)'=1e^x+x(e^x)'=e^x(1+x)>0$，$\forall x\in(-1,+\infty)$ 或

$y'=e^x(1+x)<0$，$\forall x\in(-\infty,-1)$，因此 $y=xe^x$ 在 $(-1,+\infty)$ 上严格递增，有

反函数. 在 $(-\infty,-1)$ 中严格递减，也有反函数. 设反函数为 $x=g(y)$

则 $\frac{dx}{dy}=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'}=\frac{1}{e^x(1+x)}$，$x\in(-1,+\infty)$ 或 $x\in(-\infty,-1)$.

(三) ex3.1/4; 7/(8), (12), (17), 8; 9; 10/(4), (5); 12; 14/(4), 15, 16; 17.

解4：已知 $f'(x_0)=\lim\limits_{\square\to 0}\dfrac{f(x_0+\square)-f(x_0)}{\square}$ 存在.

而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h)}{h}=\alpha\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha h)-f(x_0)}{\alpha h}+\beta\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-\beta h)-f(x_0)}{-\beta h}$

$=\alpha f'(x_0)+\beta f'(x_0)=(\alpha+\beta)f'(x_0)$

解7/(8)：4个中间变量，从外到里，层层求导，最后相乘：

$y'_x=\cos(\cos^5(\arctan x^3))\,5\cos^4(\arctan x^3)(-\sin(\arctan x^3))\dfrac{1}{1+(x^3)^2}\cdot 3x^2$；

解7/(12)：$y'_x=\dfrac{1}{\ln^2(\ln^3 x)}\,2\ln(\ln^3 x)\,\dfrac{3\ln^2 x}{\ln^3 x}\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{6}{x}\,\dfrac{1}{\ln(\ln^3 x)}\,\dfrac{1}{\ln x}$；

解7/(17)：令 $y=\dfrac{(x+5)^2(x-4)^{1/3}}{(x+2)^5(x+4)^{1/2}}$ 两边取对数：

$\ln y=2\ln(x+5)+\frac{1}{3}\ln(x-4)-5\ln(x+2)-\frac{1}{2}\ln(x+4)$，再两边对 x 求导：

$\dfrac{1}{y}y'_x=\dfrac{2}{x+5}\cdot 1+\dfrac{1}{3(x-4)}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{1}{2(x+4)}\Rightarrow y'_x=y\left(\dfrac{2}{x+5}+\dfrac{1}{3(x-4)}-\dfrac{5}{x+2}-\dfrac{1}{2(x+4)}\right)$

解(8)：$f(x)=x^3$，$f(x^2)=(x^2)^3=x^6$，$f'(x)=3x^2\Rightarrow f'(x^2)=3(x^2)^2$

$=3x^4$，而 $[f(x^2)]'=(x^6)'=6x^5=f'(x^2)\cdot(x^2)'=3x^4\cdot 2x=6x^5$.

注：$[f(x^n)]'=f'(x^n)\cdot(x^n)'=nx^{n-1}f'(x^n)\neq f'(x^n)$

例9: $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $g(x)=e^{\sqrt{x^2+1}}$ $\Rightarrow$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(x+\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\Rightarrow f'(g(x))=\frac{1}{\sqrt{1+g^2(x)}}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}$$

而 $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\sqrt{x^2+1}}}}\cdot e^{\sqrt{x^2+1}}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

故 $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)\neq f'(g(x))$.

例10(4): $y=\sin(f(\sin f(x)))$

$y'=\cos(f(\sin f(x)))\cdot f'(\sin f(x))\cos f(x)\cdot f'(x)$.

例10(5): $y=f(f(f(\sin x+\cos x)))$.

$y'=f'(f(f(\sin x+\cos x)))f'(f(\sin x+\cos x))f'(\sin x+\cos x)\cdot(\cos x-\sin x)$

证12(1). $n=1$时, $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\because f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导;

(2) 当 $n=2$时, $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

有 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$;

而在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$中，$f'(x)=(x^2\sin\frac{1}{x})'=(x^2)'\sin\frac{1}{x}+x^2(\sin\frac{1}{x})'$

$=2x\sin\frac{1}{x}+x^2(\cos\frac{1}{x})\frac{-1}{x^2}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$

由于$f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$不存在

$\therefore f'(x)$在$x=0$处间断，且$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点中的振荡间断点。

(注：导函数$f'(x)$若在区间I中存在，则$f'(x)$在I中无第一类间断点)

例：当$n\geq3$，$f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}\Rightarrow$

$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^n\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}x^{n-1}\sin\frac{1}{x}=0$

且$x\in(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$时，$f'(x)=(x^n\sin\frac{1}{x})'=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$

且$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to0}x^{n-2}\cos\frac{1}{x}=0-0=0=f'(0)$.

$\therefore f'(x)$在$x=0$处C，由初等函数的C性易知，$f'(x)$在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$上也C，此时$f'(x)$在$(-\infty,+\infty)$上处处C。

例14/(4)．求$y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$的反函数的导数$\frac{dx}{dy}$

(4)．

解：∵ $y'_x=\frac{1}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\left(e^x+\frac{e^{2x}\cdot 2}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)=\frac{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x+\sqrt{1+e^{2x}}}\cdot\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

$=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$. ∴ $y=\ln(e^x+\sqrt{1+e^{2x}})$ 在 $(-\infty,+\infty)$

上有反函数 $x=g(y)$，且

$$\frac{dx}{dy}=g'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{y'_x}=\frac{1}{\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}}=\frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}=\sqrt{2\cosh x}.$$

证15(前)：已知 $f(x)$ 可导，$x\in(-a,a)$，$a>0$．且 $f(-x)=f(x)$，

两边对 x 求导得：$f'(-x)(-1)=f'(x)\Longleftrightarrow f'(-x)=-f'(x)$，$x\in(-a,a)$

即导函数 $f'(x)$ 是奇函数；

证15(后)：已知 $f(x)$ 可导，$x\in(-a,a)$，$f(-x)=-f(x)$．

两边关于 x 求导得：$f'(-x)(-1)=-f'(x)\Longleftrightarrow f'(-x)=f'(x)$，$x\in(-a,a)$

即偶函数若可导，则导函数是奇函数；奇函数若可导，则导函数是偶函数。

证16：已知 $f(x)$ 可导，$x\in(-\infty,+\infty)$．且 $\exists T>0$，使

$f(x+T)=f(x)$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$．两边关于 x 求导得：

$f'(x+T)\cdot 1=f'(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$．即 $f'(x)$ 以 T 为周期。

练习17(1)．令 $A(x)=x+x^2+x^3+\cdots+x^n$，则 $A'(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=P_n$

$A'(1)=1+2+3+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}$，当 $x\neq1$ 时，$A(x)=\frac{x(1-x^n)}{1-x}=\frac{x-x^{n+1}}{1-x}$．

$$P_n=A'(x)=\frac{(1-(n+1)x^n)(1-x)-(1-x)'(x-x^{n+1})}{(1-x)^2}=\frac{1+nx^{n+1}-(n+1)x^n}{(1-x)^2};$$

练习17(2)．$Q_n=1^2+2^2x^1+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}\Rightarrow x=1$ 时，$Q_n=1^2+2^2+\cdots+n^2$

$=n(n+1)(2n+1)/6$．当 $x\neq1$ 时，$Q_n=(xA'(x))'=(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n)'$

$$=\left(\frac{x+nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}\right)'=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

练习17(3) 令 $B(x)=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$，则 $x\neq2k\pi$ 时，

$B(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$，且 $R_n=B'(1)=\cos1+2\cos2+\cdots+n\cos n$

$$\text{利用 } B'(x)=\frac{(-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}+(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})x)2\sin\frac{x}{2}-(\cos\frac{x}{2})(\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x)}{(2\sin\frac{x}{2})^2}$$

$$\Rightarrow R_n=B'(1)=\frac{-(\sin^2\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2})+2\sin\frac{1}{2}(n+\frac{1}{2})\sin(n+\frac{1}{2})+\cos\frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2})}{(2\sin\frac{1}{2})^2}.$$

三)作业：ex3.1：

1/(2),(3)；7/(13),(16),(18)；8；10/(2),(6)；11/(2)；14/(2)；ch3综/1.