第12讲："求导三大法则"及其应用

（一）求导的"四则运算法则"：

设 $u(x), v(x)$ 都在区间 I 上可导，C_1, C_2 为任意常数，则有

(1). $(C_1u(x)+C_2v(x))'=C_1u'(x)+C_2v'(x)$；（可推广到任意有限个）

特别地，当 $C_1=1, C_2=\pm1$ 时，有 $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$；$C_1=k$，$C_2=0$ 时，有 $(ku(x))'=ku'(x)$.

(2). $(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$；（可推广到任意有限个）

(3). $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{v^2(x)}$，$(v(x)\neq0, \forall x\in I)$.

证(2)：$(u(x)v(x))'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-v(x+\Delta x)u(x)+v(x+\Delta x)u(x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to0}v(x+\Delta x)\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to0}u(x)\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=u'(x)v(x)+v'(x)u(x)$

同理可有：$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$

证(3)：$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{v(x)u(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x\, v(x+\Delta x)v(x)}$

$=\dfrac{1}{v^2(x)}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{v(x)u(x+\Delta x)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}$

$=\frac{1}{V^2(x)}\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}V(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-\frac{u(x)(V(x+\Delta x)-V(x))}{\Delta x}\right)$

$=\frac{1}{V^2(x)}(u'(x)V(x)-V'(x)u(x))=\frac{u'(x)V(x)-V'(x)u(x)}{V^2(x)}$.

特别地，当 $u(x)=1$ 时有 $\left(\frac{1}{V(x)}\right)'=\frac{-V'(x)}{V^2(x)}$，$x\in I$.

(三)、"反函数求导法则"：

设 $y=f(x)$ 在 I 上可导，且 $f'(x)\neq 0$，$x\in I$. 则 $y=f(x)$ 在 I 上有反

函数：$x=\varphi(y)$，$y\in f(I)$，且 $\varphi(y)$ 可导，并且有：

$\varphi'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ 或 $\varphi'(y)f'(x)\equiv 1$. $\forall x\in I$.

证：不妨设 $f'(x)>0$，$x\in I$，则 $\because \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$，$x\in I$

$\Rightarrow \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x)$，$\alpha(x)\to 0$ $(\Delta x\to 0)\Rightarrow$

$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(x)\Delta x=f'(x)\Delta x+o(\Delta x)$ 由 $f'(x)>0$ 知，当 $\Delta x>0$

时，$\Delta y>0\Rightarrow y=f(x)$ 在 I 上严增 $\Rightarrow y=f(x)$ 在 I 上有反函数 $x=\varphi(y)$

且 $\varphi(y)$ 连续，即 $\Delta y\to 0$ 时 $\Delta x\to 0$. $\Rightarrow$

$\varphi'(y)=\frac{dx}{dy}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

注：当 $f'(x)<0$，$x\in I$ 时，同理可证 $f(x)$ 在 I 上严减。

(三) 复合函数求导法则

设 $y=f(u)$ 在 I_1 上可导，$u=g(x)$ 在 I_2 上可导，且复合 $f(g(x))$ 有意义，则 $f(g(x))$ 在 I_2 上可导，且 $y'_x=(f(g(x)))'_x=y'_u\cdot u'_x=f'(u)\cdot g'(x)$

证：从 $u=g(x)$ 在 I_2 上可导知 $u=g(x)$ 在 I_2 上连续，$\Rightarrow \Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$.

而 $y'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)$

$=\left(\lim\limits_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\right)\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=y'_u\cdot u'_x=f'(u)\cdot g'(x)$.

当中间变量为任意有限个时，上述结论仍成立。

(四) 18个"求导基本公式的推导与化简路线图"

(1). $(C)'\equiv 0$，(2). $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$，$\forall x\in R$，(3) $(a^x)'=a^x\ln a$ $(a>0, a\neq 1)$

(4). $(e^x)'=e^x$，(5). $(\ln x)'=\frac{1}{x}$. (6) $(\log_a x)'=\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)'=\frac{1}{x\ln a}$.

(7) $(\sin x)'=\cos x$，(8). $(\cos x)'=-\sin x$

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$，(10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$.

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$，(12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

(13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, (14) $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$.

(15) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, (16) $(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$, $\forall x\in R$.

(17) $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \cosh x$, (18) $(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \sinh x$.

证(4): $(e^x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = e^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} \xlongequal[\Delta x\to 0]{e^{\Delta x}-1\sim\Delta x}$

$e^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = e^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}1 = e^x\cdot 1 = e^x$;

~~证(2): $(x^\alpha)' = e^{\alpha}$~~, 证(5): 设 $y=\ln x$, 则反函数为 $x=e^y$,

$y\in R$, 而 $(\ln x)'_x = \frac{1}{(e^y)'_y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$, $\forall x>0$.

证(6): $(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln a}$, $\forall x>0$.

证(2): $(x^\alpha)' = (e^{\alpha\ln x})' \xlongequal{u=\alpha\ln x} (e^u)'_u\cdot(\alpha\ln x)'_x = e^u\cdot\frac{\alpha}{x} = x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$;

证(3): $(a^x)' = (e^{x\ln a})' \xlongequal{u=x\ln a} (e^u)'_u\cdot(x\ln a)' = e^u\cdot\ln a = a^x\ln a$;

证(3)另法: 令 $y=a^x$ 则有反函数 $x=\log_a y$, $y>0$.

$(a^x)'_x = \frac{1}{(\log_a y)'_y} = \frac{1}{\frac{1}{y\ln a}} = y\ln a = a^x\ln a$;

(7) 已证, 证(8): $(\cos x)' = (\sin(x+\frac{\pi}{2}))' \xlongequal{u=x+\frac{\pi}{2}} (\sin u)'_u\cdot(x+\frac{\pi}{2})'_x$

$= \cos u\cdot(1+0) = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$;

证(9)：$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$；

证(10)：$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$；

证(11)：$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x\cdot\tan x$；

证(12)：$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x\cot x$；

证(13)：令 $y=\arcsin x$，则 $\sin y=\sin(\arcsin x)=x$，即 $x=\sin y$ 为反函数，$|y|<\frac{\pi}{2}$，$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

证(15)：令 $y=\arctan x$，则 $\tan y=\tan(\arctan x)=x$，即 $x=\tan y$ 为反函数，$|y|<\frac{\pi}{2}$，$(\arctan x)'_x = \frac{1}{(\tan y)'_y} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$；

同理，$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}$，

证(17)：∵ $(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = \frac{-(e^x)'}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = \frac{-1}{e^x} = -e^{-x}$（或 $(e^{-x})' \xlongequal{u=-x} (e^u)'_u\cdot(-x)'_x = e^u\cdot(-1) = -e^{-x}$.） ∴ $(\sinh x)' = \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left((e^x)'-(e^{-x})'\right) = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x}) = \cosh x$；$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh x$.

化简路线图：从 $(4)\Rightarrow(5)\Rightarrow(6)\Rightarrow(3)$ 是一条路径.

$(5)\Rightarrow(2)$.

$(4)\Rightarrow(17),(18)$

从(7)$\Rightarrow$(8)$\Rightarrow$(9),(10),(11),(12),(13),(14),(15),(16) 是第二等路径;

利用求导的四则运算法则 及 $(e^x)'=e^x \Rightarrow$

$c(e^x)'=(ce^x)'=c'e^x+(e^x)'\cdot c \Rightarrow c'e^x=0$ 且 $e^x\neq 0$ ∴ $c'=0$.(第二等路径)

最后,由Euler公式:$e^{ix}=\cos x+i\sin x$ 及 $(e^{ix})'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{i(x+\Delta x)}-e^{ix}}{\Delta x}$

$=e^{ix}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{e^{i\Delta x}-1}{\Delta x}$ $\frac{e^{i\Delta x}-1\sim i\Delta x}{\Delta x\to 0}$ $e^{ix}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{i\Delta x}{\Delta x}=e^{ix}\cdot i$

$=i(\cos x+i\sin x)\Rightarrow(\cos x+i\sin x)'=ie^{ix}=i(\cos x+i\sin x)=-\sin x+i\cos x$

即 $(\cos x)'+i(\sin x)'=-\sin x+i\cos x \Rightarrow \begin{cases}(\sin x)'=\cos x.\\ (\cos x)'=-\sin x.\end{cases}$

最终,18个求导基本公式化简为1个求导公式 $(e^u)'_u=e^u, u\in R$.

四. 设 $x>0, a>0, a\neq 1$, 求 $y=x^x+x^{x^x}+a^{x^a}+x^{a^x}+x^{a^a}+a^{a^x}+a^{a^a}$ 的导数.

解: $y'=(x^x)'+(x^{x^x})'+(a^{x^a})'+(x^{a^x})'+(x^{a^a})'+(a^{a^x})'+(a^{a^a})'$

$=x^x(1+\ln x)+x^{x^x}(x^x(1+\ln x)+x^{x-1})+a^{x^a}(ax^{a-1}\ln a)+x^{a^x}(a^x\ln a\ln x+\frac{a^x}{x})+$

$x^{a^a}(\frac{a^a}{x})+a^{a^x}(a^x(\ln a)^2)+0$

(六) 作业: EX3.1: 1/(4),(5),(6); 2/(1); 3; 5; 7/(4),(10),(16); 14/(11),(13).