期末复习习题课

刘越

2025 年 1 月 13 日

作为形式化的语言, 数学分析语言想要以形象化的去推理, 也是从性质得出灵感的. 但是需要强调的是, 考试的难度会远小于所给的性质定理结论的形式化证明, 这门课程是数学分析 B1, 强调的是基本的概念和计算, 所以我们在复习的时候, 要把握住这个重点, 不要被一些细节问题所困扰.

本讲义用于期末复习, 计划以知识点串讲的方式讲述知识点之间的联系, 以题目讲解考试题型. 受篇幅影响, 可能会较少的涉及到非考试相关内容. 同时如果一个知识点出现在多个地方, 我会结合这个地方的特征重复性的提及这些内容.

第 1 节 极限与连续

我们对于一个概念的理解, 其实是从这个概念的性质以及算例中开始的. 比如收敛数列是由 $\varepsilon-\delta$ 语言定义的, 但是我们判断一个数列收敛与否, 想象其点列的结构其实是更加方便的.

极限与连续的主要知识点为

知识点 1.1. *极限*

1. $\varepsilon-N$ *语言定义收敛数列*
2. *否定定义证明不收敛*
3. *Stolz, 两边夹求收敛*
4. *常见无穷大量的比较:* $\ln n \ll n^{\alpha} \ll a^n \ll n! \ll n^n, \alpha>0, a>1$
5. *Cauchy 准则*
6. $\lim\limits_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e.$
7. *实数完备性公理*
8. *Henie 定理等求极限技巧*

1.1 $\varepsilon-N$ 语言

究竟应该什么时候用?

其中 $\varepsilon-N$ 语言无论是在数列极限, 函数极限, 连续性, 定积分的定义, 一致收敛的函数列都会有涉及, 下半学期的这种判别主要以二级定理的判别法为主.

具体而言, 当判断级数的收敛性, 绝对收敛性, 函数列的一致收敛性, 反常积分的收敛性时, 要么可以直接用函数的性质要么可以用判别法, 这种题目中使用 $\varepsilon - N$, $\varepsilon - \delta$ 语言这种精细的操作一定是所有基础的判别尝试完了之后的无奈之举.

例 1.2. *2020-2021,1,(2)*

计算 $\int_0^1 \ln x dx$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln x dx &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \ln x dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[x\ln x|_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 x\frac{1}{x}dx] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}[-\varepsilon\ln\varepsilon + 1 - \varepsilon] \\ &= 1.\end{aligned}$$

此处不需要很精细的去说明 $x\ln x$ 的连续性, 不用从 $\varepsilon{-}\delta$ 语言出发, $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ 这个结论我们已经很熟悉了.

例 1.3. *2021-2022,9,(1)*

设 $\{a_n\}$ 是实数列, $a_1 = 1$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

$|a_n\cos nx| \le |a_n|$, 由 Weierstrass 判别法 ***定理 7.31*** *知 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.*

Cauchy 判别法有好几个, 这里全列出来

定理 1.4. *数列的 Cauchy 准则*

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得 $n, m > N$ 时, $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

定理 1.5. *函数的 Cauchy 准则*

函数 $f(x)$ 在 x_0 处收敛的充要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得 $x, y \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ 时, $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

定理 1.6. *级数的 Cauchy 准则*

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛的充要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$,$\forall n > N$,$\forall p$, 有 $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$.

定理 1.7. *函数列的 Cauchy 准则*

函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛的充要条件是: 对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}, \forall n > N, \forall p, \forall x \in E$, 有 $|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Cauchy 准则的使用情况其实是很少的, 因为他是与收敛等价的. 这个定理很强, 而越强的定理, 放缩的越精细的定理, 往往使用的情况越少. 但是后面两个 Cauchy 准则的表述要能默写出来.

也就是说, 我们在考虑级数的收敛性, 绝对收敛性, 函数列的一致收敛性, 反常积分的收敛性时, 可以把 Cauchy 准则,$\varepsilon - \delta$ 语言放在最后尝试.

但是有一种题型的 $\varepsilon - \delta$ 语言已经成为了定式, 这种虽然精细, 不易现场想出来的操作, 最好背一下过程, 以便在考试中能够快速的完成.

题型 1.8. *2022-2023,7*

设 f 是 $[0,1]$ 上的连续函数, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx$.

2020-2021,8

设 $f(x), g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 不恒为零,$g(x)$ 恒正, 定义 $I_n = \int_a^b (f(x))^n g(x)dx$, 证明数列 $\{\frac{I_{n+1}}{I_n}\}$ 收敛, 并求其极限.

这种题目的固定过程我也放在第八次习题课讲义之中, 如果做不出来, 可以参考那里的解答. 根据出一年隔一年的规律, 合理怀疑今年会考 *(bushi)*.

1.2 Stolz 定理

Stolz 定理一定不能反着用, 一定不能反着用, 一定不能反着用.

再来看一遍 Stolz 定理的叙述:

定理 1.9. *Stolz 定理*

设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = A$. 其中 A 可以是 $+\infty$.

也就是我们在知道后者收敛或趋于定号无穷大的情况下, 可以用 Stolz 定理求前者的极限. 单纯考 Stolz 的几乎不太会再出现了, 基本只会藏在级数的题目里.

删去

我认为的是, 期中的时候倒数第二题那种利用 Stolz 的很细致的放缩, 是不会再出现的. 关于这个定理只会成为相当不重要的一步, 而不是整个题目的重点. 也不用担心卡在 Stolz 定理上, 如果谈及 Stolz 定理的证明那就更不可能考了.

1.3 常见无穷大量的比较

这一部分主要是养成一个直觉, 我从作业感觉大家的理解已经很到位了. 这里再拿一个例子来说明一下.

例 1.10. *作业习题 7.1,2,(13)*

研究 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ *的敛散性.*

由于 $\ln n$ *的增长速度太慢了, 他满足* $\ln n = o(n^{\alpha}), \alpha > 0$, *又总是存在* $\alpha < \frac{1}{4}$ *使得* $n^{\alpha} = o(n^{\frac{1}{4}})$, *所以* $\ln n = o(n^{\frac{1}{4}})$, *所以* $\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} = o(\frac{1}{n})$, *所以* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ *收敛. 这也说明,*$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\beta}}, \beta > 1$ *都是收敛的. 当然过程不是这么写的, 过程可以看群里作业答案.*

可以这么说, 数列与函数的高阶大或者高阶小的判定, 数列极限函数极限的判定, 是为级数的收敛性, 绝对收敛性, 函数列的一致收敛性, 反常积分的收敛性准备的.

数列极限, 函数极限的求值是为微分学求值, 或者说进而为级数求值准备的. 因此我觉得没必要在专门去再刷一遍期中前的那些作业数列求值题起码不用动手算, 只用说看一眼有思路就行.

第一章的闭区间套定理, 单调有上界必收敛, 二分法, 闭区间连续函数的性质等证明这些证明思路太困难了, 而且他也属于完完全全的上学期的知识点. 而且期末考试的宗旨是不主动考上半学期的内容, 除非顺带着涉及了. 因此复习时, 这几个实数的等价表示前后的定理, 掌握要求都属于能背出来定理的数学表示就行.

第 2 节 单变量微分学

单变量微分学的主要知识点为

知识点 2.1. *单变量微分学*

1. *导数的定义, 性质, 和计算*
2. *微分概念, 微分中值定理*
3. *单调性, 极值, 凹凸性, 拐点,Taylor 展开.*

期末考试对于导数和微分的定义和性质, 要能叙述出一阶微分的形式不变性是什么含义, 其中 $\Delta y, dy$ 的区别是什么? 要能判断 $x^\alpha \sin\dfrac{1}{x^\beta}$ 在 $x=0$ 处的可微性.

解. 一阶形式微分不变性

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x), \Delta x \to 0$. 称 $A\Delta x$ 为函数 $f(x)$ 在 x 处的一阶微分, 记作 $df(x)$, 即 $dy = A\Delta x, df(x) = A\Delta x$. 也就是说 $\Delta y = dy + o(\Delta x)$.

一阶形式微分不变性: 无论 y 是中间变量还是自变量, $z=f(y)$ 的微分具有相同的形式 $df(y) = f'(y)dy$. **定理 3.11, P96** □

期末考试这部分概念不会猛猛与其他知识点结合, 考的比较单一

例 2.2. *2017-2018,7*

已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上可导,$x_0 \in (a,b)$, 定义函数

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, & x \in (a,b)\backslash\{x_0\} \\ f'(x_0) & x = x_0 \end{cases}$$

$g(x)$ 在 x_0 可导, 且 $f(x)$ 在 x_0 二阶可导, 求证:$g'(x)$ 在 x_0 连续.

拿定义写 $g'(x)$ 的具体值.

高阶的导数得掌握, 由期中的那种题目可以看出很多同学对高阶导数的计算不是很了解, 这是很不利于后面计算 Taylor 级数,Maclaurin 级数的. 基础的 $\ln x, e^x, \sin x, \cos x$ 的高阶导数要能快速的写出来, 其中 $\sin x$ 的高阶导数不用写分类讨论形式的, 要写成 $\sin^{(n)} x = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$ 的形式. 到稍微有一些难度的 $\arcsin x, x\ln x, \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ 的高阶导数也要能写出来.

例 2.3. *高阶导数的计算*

2013-2014,1(2) 求 $\big((x^2+1)\sin x\big)^{(n)}$.

2015-2016,3 设 $f(x) = x\ln(1+x^2)$, 求 $f^{(n)}(0)$.

2017-2018,6 求函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $x=2$ 处的 Taylor 级数展开式.

2018-2019,1 设 $f(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$, 求 $f^{(n)}(0)$.

2020-2021,5 将 $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在点 $x_0 = -4$ 处展开成 Taylor 级数.

2023-2024,1(6) 求 $(1+x^2)\ln(1+x^2)$ 的 Maclaurin 级数.

$((1+x^2)\ln(1+x^2))' = 2x\ln(1+x^2) + \dfrac{2x^3}{1+x^2}$, 然后再求导.

第 3 节　不定积分与定积分

不定积分与定积分的主要知识点为

知识点 3.1. *不定积分与定积分*

1. 求解不定积分, 定积分

2. 定积分的性质, 定积分的应用

3.1　定积分的求解

1. 原函数
2. 还原法
3. 分布积分法
4. 分部积分
5. 分段函数

例 3.2.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x+|\cos x|}dx$$

解.

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx\\
&=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx\quad(\text{令}y=\pi-x)\\
&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx+\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx\right)\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx\\
&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos y}{\cos y+\sin y}\,dy\quad(\text{令}x=y+\frac{\pi}{2})\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

□

3.2　和积分有关的极限

和积分有关的极限题主要是两类, 一类是和式的极限, 要求能正确将和式的极限表达成一个定积分, 一般都是将区间 n 等分, 另一类是含有变限积分的未定式的极限, 要正确处理藏在积分内部的 x.

例 3.3. 已知 $f'(x)$ 连续，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1 f(x^2t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(x^2t)\,\mathrm{d}t}{x\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

利用 *L'Hôpital* 法则，有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x^2f(x)}.$$

同时我们有：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{f(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2xf'(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(0)x+o(x)}{2x(f'(0)+o(x^2))}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{2xf(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2(f'(0)x+o(x))}{2x(f'(0)+o(x^2))}=\frac{1}{2}.$$

最终可得：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^1 f(x^2t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t}=1.$$

3.3 可积性

关于黎曼可积，一般不会考察，如果复习时间不够的话这一块就不需要看了. 这一块主要是搞明白几个概念，**达布和**以及**振幅**. 我们简单梳理一下这几个概念. 对于一个分割我们可以定义上和和下和，上和是小区间的长度乘以被积函数在小区间上的上确界再求和，下和是小区间的长度乘以被积函数在小区间上的下确界再求和. 达布上和是所有上和的下确界，上和随着分割的加细会减小，这保证了我们可以让分割的细度趋于 0 从而达到下确界. 达布下和同理, 注意对任意有界函数，达布上和和达布下和都是良定的，也就是都是有限的, 但是达布上和和达布下和不一定相等，黎曼可积的函数就是达布上和等于达布下和的函数. 函数在某个区间上的振幅就是函数在这个区间上的上下确界之差，由黎曼可积的概念不难理解，可积的函数就是振幅求和随着分割细度趋于 0 而趋于 0 的函数. 需要会的一类题目是若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，那么很多关于 f 的函数例如 $f^2, e^f, \ln f$ 等都是可积的.

作为题目, 只需要考虑振幅即可.

定义 3.4 (**课本 5.2.1 节**). 振幅*:*

对于给定的分割 T, 设函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的上确界和下确界分别为 M_i 和 m_i, 即

$$M_i=\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x).$$

并记 $\omega=M-m,\omega_i=M_i-m_i$, 其中 $M=\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x), m=\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, 称 ω_i 为函数 $f(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅.

定理 3.5 (定理 5.22). 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 则 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$$

例 3.6. *2022-2023 6.* 已知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积, 证明 $e^f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是黎曼可积.

给定分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 设 $f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅为 ω_i, 则 $e^f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅为 $\Omega_i=e^{M_i}-e^{m_i}=e^{M_i}(1-e^{m_i-M_i})\leqslant e^M 1-e^{-\omega_i}\leqslant e^M\omega_i$.

故 $\sum\limits_{i=1}^{n}\Omega_i\Delta x_i\leqslant e^M\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to 0, ||T||\to 0.$

3.4 定积分的应用

公式要么会推, 要么能背下来.

3.4.1 弧长公式

参数方程形式:

平面曲线 L 表示为参数方程:$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}\quad(t\in[\alpha,\beta])$, 则 L 的弧长为:

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt.$$

这个可以推出: 1. 直角坐标系下的弧长公式,$y=f(x)$, 则令 $x(t)=t,y(t)=f(t)$, 则 $L=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$.

3. 极坐标系下的弧长公式,$r=r(\theta)$, 则令 $x=r(\theta)\cos\theta,y=r(\theta)\sin\theta$, 则 $L=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r(\theta))^2+(r'(\theta))^2}d\theta$.

3.4.2 面积

参数方程形式:

平面曲线 L 表示为参数方程:$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t \in [\alpha, \beta])$, 则

1. 曲线 L 与 x 轴围成的曲边梯形面积为:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)|dt.$$

2. 曲线 L 与 x 轴围成的曲边梯形面积为:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)x'(t)|dt.$$

3. 曲线封闭, 则封闭图形的面积为:

$$S = \left| \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))dt \right|.$$

由这个也可以推出 $y = f(x)$ 的面积公式.

第 4 节 微分方程

不会考的特别难, 因为前面的背死公式太为难人了, 而且计算量又很容易过大, 因此大概率就只考一下常系数微分方程.

其中要注意待定系数法:

例 4.1. $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

求解非齐次方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}P_m(x)$ 时候, 可设特解为:

$$y^* = x^k P_m(x)e^{\lambda x}$$

其中:

$$\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ P_m(x)\text{为}m\text{次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当}\lambda\text{不是特征根}, \\ 1, & \text{当}\lambda\text{是特征单根}, \\ 2, & \text{当}\lambda\text{是特征重根}. \end{cases} \end{cases}$$

例 4.2. $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 型

求解非齐次方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right]$ 时候, 可设特解为:

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x + Q_m(x)\sin\omega x\right]$$

其中:

$$\begin{cases} e^{\lambda x}\text{照抄}, \\ m = \max\{l, n\},\ P_m(x)\text{和}Q_m(x)\text{分别为}m\text{次一般多项式}, \\ k = \begin{cases} 0, & \text{当}\lambda + \omega i\text{不是特征根}, \\ 1, & \text{当}\lambda + \omega i\text{是特征根}. \end{cases} \end{cases}$$

也不用考虑的这么完善, 把下面这两个做了感觉一下就行, 完整形式的待定系数计算量太大了.

例 4.3. 非齐次方程的求解

2023-2024 2. 求解微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x$ 的通解.

2021-2022 4. 求解微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 2x$ 的通解.

2020-2021 3. 求微分方程 $y'' + 4y = 9x\sin x$ 的通解.