第11讲：函数的导数与18个求导基本公式

(一) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数的概念

(1) 设 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 中有定义，$x_0+\Delta x\in U(x_0,\delta)$. 若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=a\in R.$$ 则称常数 a 为 $f(x)$

在点 x_0 处的导数(derivative)，记作 $f'(x_0)=a$. 即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=a=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$，并称 $f(x)$ 在 x_0 处可导。

此时，有 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x)$，$\alpha(x)\to 0\ (\Delta x\to 0)\Longrightarrow \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(x)\Delta x$

$\to 0\ (\Delta x\to 0)$ 即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，即 $f(x)$ 在点 x_0 处连续。

即"可导必连续"，但"连续未必可导"。

例1. 设 $f(x)=|x|$，$x\in R$. 则 $\because f(0)=0=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=f(0+0)$

$=0=f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$ $\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处 C，但

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|0+\Delta x|-|0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$ 不存在.

即 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

记：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$，$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

分别称$f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$是$f(x)$在x_0处的左导数与右导数。

th1：$f'(x_0)$存在$\Longleftrightarrow f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$均存在且相等.

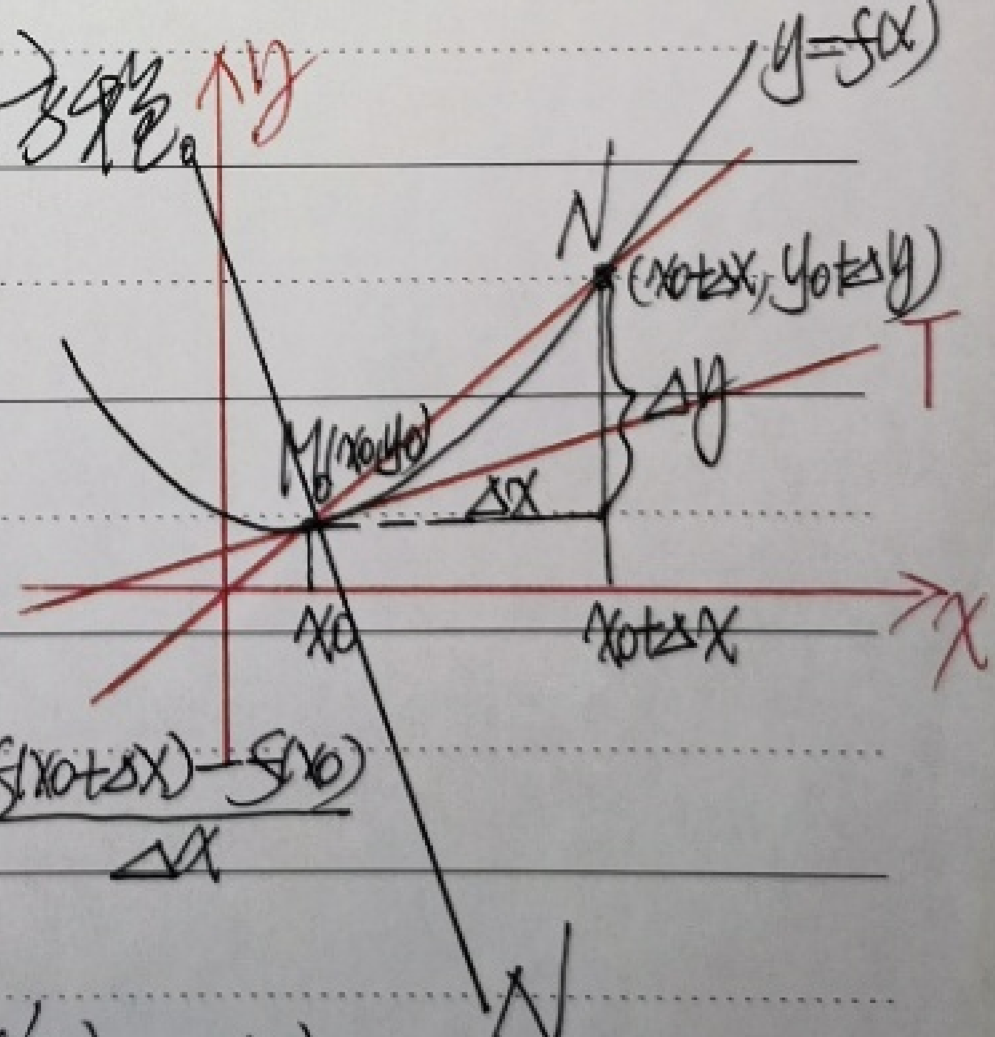
证：∵ $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

∴ $f'(x_0)$存在$\Longleftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

若$f(x)$在区间I上每一点x处都可导，则称$f(x)$在区间I上可导，

并称$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$为导函数，$x\in I$。

例2、设$f(x)$在x_0处可导，求曲线$y=f(x)$上点$M(x_0,y_0)$处的切线T的方程与法线N的方程。



解：(1)先求出过M_0的割线M_0N的斜率$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，再让$\Delta x\to 0$得到切线T的斜率$k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$=f'(x_0)$，$\Rightarrow$切线T的方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$，

法线N的方程：$y-y_0=\frac{-1}{f'(x_0)}(x-x_0)$，（设$f'(x_0)\neq 0$）

(2).

从例2可知，导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是过切点 $M_0(x_0,y_0)$ 的切线下的斜率。

例3. 设质点的运动方程为 $s=f(t)$，$t\in I$，求质点在 t_0 时刻的即时速度，$t_0\in I$。

解：先求质点在时段 $[t_0,t_0+\Delta t]$ 上的平均速度：
$\bar{V}(t_0)=\dfrac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$，再令 $\Delta t\to 0$，若 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 存在，即 $f'(t_0)$ 存在，则 $f'(t_0)$ 即为质点在 t_0 时刻的即时速度，这就是导数的物理意义。

从经济学的角度来说，$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是因变量的改变量 Δy 相对于自变量 Δx 而言的相对变化率。例如，若 $f'(x_0)=5$，则可认为自变量 x 在 x_0 处有 1% 的变化时，y 在 $y_0=f(x_0)$ 处约有 5% 的变化。余类推。

(二) 18个基本求导公式（设 C, a, α 为常数，$a>0$, $a\neq 1$）。

(1). $(C)'=0$；(2). $(a^x)'=a^x\ln a$；(3). $(e^x)'=e^x$.

(4). $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$. (5). $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, (6). $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

(7). $(\sin x)' = \cos x$, (8) $(\cos x)' = -\sin x$

(9). $(\tan x)' = \sec^2 x$, (10) $(\cot x)' = -\csc^2 x = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$

(11) $(\sec x)' = \sec x \tan x$, (12) $(\csc x)' = -\csc x \cot x$.

(13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$, (14) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$.

(15). $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in R$, (16). $(\text{arccot}\, x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$, $x \in R$.

(17). $(\sinh x)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \cosh x$, (18) $(\cosh x)' = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \sinh x$

称 $\sinh x$ 或 $\text{sh}\, x$ 为双曲正弦函数，$\cosh x$ 或 $\text{ch}\, x$ 为双曲余弦函数。

证明：利用 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, $x \in I$

(1). $f(x) \equiv C$, $(C)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{C - C}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$;

(2). $f(x) = a^x$, $(a^x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$ $\dfrac{a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a}{\Delta x \to 0}$

$a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a$. 特别地，当 $a = e$ 时，$(e^x)' = e^x \ln e = e^x$.

证(4) $f(x) = x^{\alpha} \Rightarrow (x^{\alpha})' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x} = x^{\alpha} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\Delta x}$

$\dfrac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1 \sim \alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x \to 0}$ $x^{\alpha} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = x^{\alpha} \cdot \alpha \dfrac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$. $\forall \alpha \in R$.

(4).

证(6)：$f(x)=\ln x \Rightarrow (\ln x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\frac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x}\ \overset{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})\sim\frac{\Delta x}{x}}{\underset{\Delta x\to 0}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}$

$=\dfrac{1}{x}.\Rightarrow (\log_a x)'=\left(\dfrac{\ln x}{\ln a}\right)'=\dfrac{1}{\ln a}(\ln x)'=\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln a}.$

证(7)．$f(x)=\sin x\Rightarrow(\sin x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$\overset{\sin\frac{\Delta x}{2}\sim\frac{\Delta x}{2}}{\underset{\Delta x\to 0}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cancel{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}=\cos x,\ \forall x\in R.$

证(8)．$f(x)=\cos x,\Rightarrow(\cos x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-2\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$

$\overset{\sin\frac{\Delta x}{2}\sim\frac{\Delta x}{2}}{\underset{\Delta x\to 0}{=\!=\!=}}\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{-\cancel{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}=-\sin x.$ 、、、

(三) 求导的四则运算法则、反函数求导法则及复合函数求导法则统称为"求导三大法则"。可以证明，在"三大求导法则"下，上述18个求导基本公式可化简成1个求导公式：$(e^x)'=e^x$，$x\in R$.（思考题）

(四)．作业：Ex3.1：1(1)；2(2)；4；7(6),(8);(13)；11(1)；14(2),(4)，15；16.