习题课讲义

Def: 一致收敛: $\forall \varepsilon > 0$. $\exists N = N(\varepsilon)$. $\forall n > N(\varepsilon)$. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对 $\forall x \in I$ 成立.

内闭一致 con: $\forall I$ 的有界闭子区间上一致收敛.

判别法:

① Cauchy 收敛准则: $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \varepsilon$

② Weierstrass: $|u_n(x)| \leq p_n(x)$, $\sum p_n(x)$ 一致 con

③ Dirichlet: $\sum a_n(x) b_n(x)$ 部分和一致有界 + 单调一致趋于 0

Abel. $\sum a_n(x) b_n(x)$. 一致收敛 + 单调一致有界

④ 不一致 con: $u_n(x) \not\rightrightarrows 0$ / 单侧极限不收敛

性质: 一致 con 保连续

内闭一致 con 保可积

逐点 con + 求导内闭一致 con 保可微

收敛半径: $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

$(-R, R)$ 上内闭一致 con. $\rightarrow$ C. D. $\int$.

第 7 章综合习题

1. 计算级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ 的和.

2. 证明: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)(n+2)} = 1$.

3. 设 $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$ 收敛的充分必要条件是 $\{a_n\}$ 有界.

4. 设 $\alpha > 0$, $\{a_n\}$ 是正的递增数列. 求证: 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1} a_n^{\alpha}}$ 收敛.

5. 设 $\Phi(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上正的严格增函数, $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 是三个非负数列, 满足

$$a_{n+1} \leqslant a_n - b_n \Phi(a_n) + c_n a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty.$$

求证: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

6. 设 $\{a_n\}$ 是正数列使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛. 求证: 存在常数 $M>0$ 使得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\leqslant M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}.$$

7. 设 $\{a_n\}$ 是一个严格单调递增的实数列, 且对任意正整数 n 有 $a_n\leqslant n^2\ln n$.

求证: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散.

8. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_{n+1}-a_n|$ 收敛, 就称数列 $\{a_n\}$ 是具有有界变差的.

(1) 证明: 具有有界变差的数列 $\{a_n\}$ 一定收敛;

(2) 构造一个发散的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 使得其通项构成的数列 $\{a_n\}$ 是一个具有有界变差的数列.

9. 设函数列 $\{f_n(x)\}, n=1,2,\cdots$ 在区间 $[0,1]$ 上由等式

$$f_0(x)=1,\quad f_n(x)=\sqrt{xf_{n-1}(x)}$$

定义, 证明: 当 $n\to\infty$ 时, 函数列在 $[0,1]$ 上一致收敛到一个连续函数.

10. 递归定义连续可微函数列 $f_1,f_2,\cdots:[0,1)\to\mathbb{R}$ 如下: $f_1=1$, 在 $(0,1)$ 上有

$$f'_{n+1}=f_nf_{n+1},$$

且 $f_{n+1}(0)=1$. 求证: 对每一个 $x\in(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$ 存在, 并求出其极限函数.

11. 设 $f_0(x)$ 是区间 $[0,a]$ 上的连续函数, 证明: 按照下列公式

$$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(u)\mathrm{d}u$$

定义的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 $[0,a]$ 上一致收敛于 0.

12. 利用二项式级数, 计算$\sqrt{2}$ 到四位小数.

1. 记 $H_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}$.

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n}-\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n+1}=\sum_{n=1}^{m}\frac{H_n}{n}-\sum_{n=2}^{m+1}\frac{H_{n-1}}{n}=1-\frac{H_m}{m+1}+\sum_{n=2}^{m}\frac{H_n-H_{n-1}}{n}$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2}-\frac{H_m}{m+1}\longrightarrow\frac{\pi^2}{6}\quad\left(\lim\frac{H_n}{n}=\lim\frac{\frac{1}{n+1}}{1}\to 0\right)$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(n+1)(n+2)}=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m}(-1)^n\cdot\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{m\to\infty}\left[1+\frac{(-1)^m}{m+2}\right]=1$$

3. $\Longrightarrow$ 设 $\sum\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=S$. 则

$$S>\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}-1\right)=\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_n}dx>\sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x}dx=\sum_{n=1}^{m}\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ln\frac{a_{m+1}}{a_1}$$

但 S 有限. 故 $\{a_n\}$ 有界.

$\Longleftarrow$ $a_n\uparrow$, 有界 $\Rightarrow a_n\nearrow a$. 收敛. 则

$\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum (a_{n+1}-a_n)$ 收敛

$\frac{1}{a_n}$ 单调有界

4. $a_n \nearrow$. $\quad \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}} = \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)+\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}} = \sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha+1}}dx < \sum_{n=1}^{m}\int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{1}{x^{\alpha+1}}dx = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{a_1^{\alpha}}-\frac{1}{a_{m+1}^{\alpha}}\right) < \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{a_1^{\alpha}}$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}^{\alpha+1}}$ 收敛.

$a_n\nearrow \Rightarrow \frac{1}{a_n^{\alpha}}\downarrow \Rightarrow \sum\frac{1}{a_n^{\alpha}}$ 收敛 $\Rightarrow \sum\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)$ 收敛

$0<\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}} = 1-\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1 \Rightarrow \sum\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}}\left(\frac{1}{a_n^{\alpha}}-\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}}\right)$ 收敛.

5. $a_n=0 \Rightarrow a_{n+1}\le -b_n(0)\le 0 \Rightarrow a_{n+1}=0 \Rightarrow$ 成立. 不妨所有 $a_n>0$.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1+c_n - b_n\frac{\Phi(a_n)}{a_n}$

① $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1+c_n$ 取 $\ln$. $\Rightarrow \ln a_{n+1}-\ln a_n \le \ln(1+c_n)\le c_n$.

累加: $\ln a_n - \ln a_1 \le \sum_{k=1}^{n-1}c_k \le C = \sum_{k=1}^{\infty}c_k$

故 a_n 有上界, 设 $0<a_n\le a^*$. $\Rightarrow \sum a_n c_n$ 收敛于 S.

$a_{n+1}\le a_n + a_n c_n = a_n + S_n - S_{n-1}$

$\therefore -S < a_{n+1}-S_n \le a_n - S_{n-1}$

$\searrow$ 有下界 $\Rightarrow a_{n+1}-S_n$ 收敛 $\Rightarrow a_n$ 收敛.

② 设 $a_n\to a$.

$a_{n+1}-a_n+b_n\Phi(a_n)\le c_n a_n$ 求和

$a_{n+1}-a_1+\sum b_n\Phi(a_n) \le \sum c_n a_n = S_n \le S$

利用 $\Phi\nearrow$.

若 $a>0$. $a_n\to a$. $a_n>0 \Rightarrow \exists\delta>0$. $a_n>\delta>0 \Rightarrow \Phi(a_n)\ge\Phi(\delta)$

$\therefore S \ge a_{n+1}-a_1+\Phi(\delta)\cdot\sum b_n$ 令 $n\to\infty$.

但 $\sum b_n = +\infty$. 矛盾

同理 $a<0$ ✗. $\Rightarrow a=0$

6 $\quad (\sum_{k=1}^n a_k)(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}) \geq (\sum k)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\Rightarrow \frac{n}{\sum_{k=1}^n a_k} \le \frac{4}{n(n+1)^2}\cdot\left(\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}\right)$$

$$\sum_{n=1}^m \frac{n}{\sum_{k=1}^n a_k} \le \sum_{n=1}^m \frac{4}{n(n+1)^2}\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{a_k}$$

$$= 4\sum_{n=1}^m\sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+1)^2}\cdot\frac{k^2}{a_k}$$

$$= 4\sum_{k=1}^m\left(\sum_{n=k}^m \frac{1}{n(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}$$

$$= 2\sum_{k=1}^m\cdot\left(\sum_{n=k}^m\frac{2n}{n^2(n+1)^2}\right)\frac{k^2}{a_k}$$

$$< 2\sum_{k=1}^m\sum_{n=k}^m\cdot\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{k^2}{a_k}$$

$$= 2\sum_{k=1}^m\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(m+1)^2}\right)\cdot\frac{k^2}{a_k} < 2\sum_{k=1}^m\frac{1}{a_k} \quad \Rightarrow M=2 \text{ 即可}$$

下证 2最佳

设 $a_n = n^p$, $p>1$. $\quad H_p=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p} \to +\infty$.

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{a_1+\dots+a_n} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}\cdot\frac{1}{\sum_{k=1}^n(\frac{k}{n})^p\frac{1}{n}} \ge \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^p}\cdot\frac{1}{\int_0^{1+\frac{1}{n}}x^p dx}$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}\cdot\frac{1}{\frac{1}{p+1}(1+\frac{1}{n})^{p+1}} = (p+1)\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{(n+1)^{p+1}} \ge 2\sum_{n=1}^\infty\left(\frac{1}{(n+1)^p}-\frac{1}{(n+1)^{p+1}}\right)$$

$$\ge 2\cdot\left(H_p - \frac{\pi^2}{6}\right)$$

7. $a_n\uparrow$. $\quad a_n\le n^2\ln n$

① $\{a_n\}$有界 $\Rightarrow$ a_n收敛 $\Rightarrow a_{n+1}-a_n\to 0 \Rightarrow \frac{1}{a_{n+1}-a_n}\to\infty$.

② a_n无界 $\Rightarrow \exists n_0$. $a_{n_0}>0$，不妨$a_n>0$

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$. 则 $\sum\frac{1}{a_{n+1}-a_n}=\sum\frac{1}{b_n}$

由6（不需 $\sum\frac{1}{b_n}$ 收敛）

$$2\sum_{n=1}^m \frac{1}{b_n} \ge \sum\frac{n}{b_1+\dots+b_n} = \sum_{n=1}^m\frac{n}{a_{n+1}-a_1}$$

$$a_{n+1}-a_1 \le (n+1)^2\ln(n+1) \Rightarrow \frac{n}{a_{n+1}-a_1}\ge\frac{n}{(n+1)^2\ln(n+1)} \ge \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$$

而 $\sum\frac{1}{n\ln n}$ 发散 $\Rightarrow \sum\frac{1}{a_{n+1}-a_n}$ 发散

8. (1) $|a_{n+p}-a_n| \leq \sum_{k=n}^{n+p-1} |a_{k+1}-a_k|$

故 $\sum |a_{n+1}-a_n|$ 收敛 $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ 收敛

(2) 易得 $a_n = a \neq 0$ 即可

9. $f_0(x)=1$ $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_2(x) = x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$. $f_n(x) = x^{1-\frac{1}{2^n}}$ 归纳.

$f_n(x) \to x$

11. 设 $f_0(x)$ 在 $[0,a]$ 上有界 M 则 $|f_n(x)| \leq M \cdot \frac{x^n}{n!}$ (归纳易知)

$\sum M \cdot \frac{x^n}{n!}$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum f_n$ 收敛 $\Rightarrow$ f_n 一致收敛于 0