习题课讲义

§1 复习

· 数项级数：$\sum_{k=1}^{n} a_k \triangleq S_n \to S$.

Cauchy 收敛：$\forall \varepsilon$. $\exists N$. $\forall n>N$. $|a_{n+1}+\dots+a_{n+p}|<\varepsilon$. $\forall p\in\mathbb{Z}^+$.

$\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow a_n\to 0$. 线性性. 可变有限项.

收敛 $\Leftarrow$ 结合律后也收敛.

正项级数. $S_{n+1}\geqslant S_n$.

收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和有界. 且收敛到 S_n 上确界. 发散到无穷大.

比较判别法：① 正项 $\sum a_n$. $\sum b_n$. 从某项起 $a_n\leqslant b_n$. 则 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.

$\sum a_n$ 发散 $\Rightarrow \sum b_n$ 发散.

② 正项 $\sum a_n$. $\sum b_n$. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

$0<A<+\infty$ 时 同敛散. $A=0$ 且 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 收敛.

$A=\infty$ 且 $\sum b_n$ 发散 $\Rightarrow \sum a_n$ 发散.

Cauchy 判别法：$\sum a_n$ 正项.

① 从某项起. $\sqrt[n]{a_n}\leqslant q<1 \Rightarrow$ 收敛 ② 有无穷多 n. $\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1$. $\Rightarrow$ 发散

③ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$. 则 $q<1$ 时. 收敛. $q>1$ 时发散.

达朗贝尔判别法：$\sum a_n$ 正项

① 从某项起. $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant q<1 \Rightarrow$ 收敛. ② 从某项起 $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \Rightarrow$ 发散

③ $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$. 则 $q<1$ 时收敛. $q>1$ 发散.

Cauchy 积分判别法：$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负单减，则 $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+nT)$ 与 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 同敛散 $(T>0)$

一般级数：

交错项级数：若非负 $\{a_n\}\downarrow 0$. 则 $\sum(-1)^{n-1}a_n$ 收敛于 S, 且 $|S_n-S|\leqslant a_{n+1}$

Weierstrass：$\sum b_n$ 正项. $|a_n|\leqslant b_n$. 则 $\sum b_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum a_n$ 绝对收敛

Dirichlet：$\sum a_n$ 部分和有界. $b_n\downarrow 0$ ($b_n \nearrow 0$). $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛

Abel：$\sum a_n$ 收敛. b_n 单调 有界 $\Rightarrow \sum a_n b_n$ 收敛

· 几何级数：$\sum q^n$ $|q|<1$ 收敛至 $\frac{1}{1-q}$. $|q|\geqslant 1$ 发散

p-级数：$\sum \frac{1}{n^p}$ $p>1$ 收敛，$p\le 1$ 发散.

$\sum \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $p>1$ 收敛，$p\le 1$ 发散

函数项级数：$f_n(x)=\sum_{k=1}^{n} u_k(x) \to f(x)$

$\forall \varepsilon$，$\exists N(\varepsilon)$，$\forall n>N$ 时，$\forall x\in I$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 成立，称 $\sum u_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$

· Cauchy 收敛准则：$\forall \varepsilon, \exists N, \forall m,n>N$，$|f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$，$\forall x$ 成立.

· Weierstrass：正项 $\sum a_n$，$|u_n(x)|\le a_n$，则 $\sum a_n$ 收敛 $\Rightarrow$ $\sum u_n(x)$ 一致收敛

逐点有界：对固定 x，$\{u_n(x)\}$ 有界 $\longleftrightarrow$ 一致有界，$\exists M$，$|u_n(x)|\le M$，$\forall n, \forall x$.

Dirichlet：$\sum u_n(x)$ 部分和有界，$\{v_n(x)\}$ 对每个固定 x，$v_n(x)\downarrow 0$ 且一致 $\to 0$，$\Rightarrow \sum u_n(x)v_n(x)$ 一致收敛.

Abel：$\sum u_n(x)$ 一致收敛，$\{v_n(x)\}$ 对固定 x，$v_n(x)\downarrow$ 且 I 上一致有界

一致收敛保连续、可积、导数连续（若存在）

· 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛半径 R：$\frac{1}{R}=\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 或 $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$

积分、微分后收敛半径不变

§2 作业选讲（7.1节）$\longrightarrow$ 公式化判断

判断敛散性（条件/绝对） $\sum a_n$

① 先看是否发散 $a_n \to 0$？

2.(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$ 发散

② (有限相邻项)求和是否可算 —— Cauchy 收敛准则

1.(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$

③ 级数类型

1) 交错项级数 $\sum (-1)^n a_n$

若非负 $a_n\downarrow 0$，则 $\sum(-1)^n a_n$ 收敛于 S，且 $|S_n-S|\le a_{n+1}$

12.(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$ $\sin\frac{1}{n}\downarrow 0$

15.(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$

令 $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[100]{x}}\right)=\ln(x-1)-\ln(x+1)-\frac{1}{100}\ln x$

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x\cdot 100}=\frac{200x-x^2+1}{(x^2-1)\cdot 100x}.$$

$x\geq 201$ 时 $f'(x)<0$. $f(x)\downarrow 0$.

有限项不影响敛散性

2) 正项级数.

1° 部分和有界

2° 比较. $\longrightarrow$ $\sum\frac{1}{n^p}$, $\sum\frac{1}{n(\ln n)^p}$, $\sum q^n$

2.(5). $\sin\frac{\pi}{3^n}\sim\frac{\pi}{3^n}$. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\frac{\pi}{3^n}=\pi\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

比值极限

12.(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(e^{\frac{1}{n}}-1)$. $\lim\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=1\Rightarrow\sum e^{\frac{1}{n}}-1$ 与 $\sum\frac{1}{n}$ 同敛散.

3° 判别法 $\sqrt[n]{a_n}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\sum f(a+nT)$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

2.(11) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ $\quad\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{n+1}{4n+2}<\frac{1}{2}$

△ 2.(14). $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}$

$0<k<1$ 时. $\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}=\int_n^{n+1}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}dx>\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^k}dx$

$$=\left.\frac{(\ln\ln x)^{1-k}}{1-k}\right|_n^{n+1}$$

$\therefore\sum\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}>\left.\frac{(\ln\ln x)^{1-k}}{1-k}\right|_3^{\infty}$ 发散.

$k=1$ 时 $\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}>\int_n^{n+1}\frac{1}{x\ln x\ln\ln x}dx=\ln\ln\ln x\Big|_n^{n+1}$

$\sum\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}>\ln\ln\ln x\Big|_3^{\infty}$ 发散

$k>1$ 时. $\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}<\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)}dx=\left.\frac{(\ln\ln x)^{1-k}}{1-k}\right|_{n-1}^{n}$

$\sum\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^k}<\left.\frac{(\ln\ln x)^{1-k}}{1-k}\right|_2^{+\infty}$ 收敛.

3. 一般级数的拆分: $\sum a_n b_n$

部分和有界 + $\downarrow 0$ 或 收敛 + 单调有界

13.(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{4}}{\ln n}$ $\quad\sum\cos\frac{n\pi}{4}$ 有界. $\frac{1}{\ln n}\downarrow 0$

部分和：$\sum \frac{1}{(n+1)n}$. $\sum \sin nx$. $\sum \cos nx$.

§3. 例题.

1. $\sum \frac{1}{2^{\ln n}}$ / $\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$.

推广：$\sum \frac{1}{a^{\ln n}}$ $(a>0)$.

注意：$a^{\ln n} = (e^{\ln a})^{\ln n} = (e^{\ln n})^{\ln a} = n^{\ln a}$.

故 $\sum \frac{1}{a^{\ln n}} = \sum \frac{1}{n^{\ln a}} \Rightarrow a>e$ 收敛. $a\le e$ 发散.

类似：$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln\ln n)^2}} > \frac{1}{e^{\ln n}} = \frac{1}{n}.$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

解：$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}dx = \int_1^{+\infty} \frac{2t}{2^t}dt = \frac{-2t}{\ln 2}\cdot 2^{-t}\Big|_1^{+\infty} + \frac{1}{\ln 2}\int_1^{+\infty} 2^{-t}dt = \frac{1}{\ln 2} - \frac{2\cdot 2^{-t}}{(\ln 2)^2}\Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2}$.

另：$\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \int_{n-1}^{n} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}dx < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{2^{\sqrt{x}}}dx = \int_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}} \frac{2t}{2^t}dt = \frac{-2t}{\ln 2}\cdot 2^{-t}\Big|_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}} + \frac{1}{\ln 2}\int_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}} 2^{-t}dt$

$$= \frac{-2t}{\ln 2}\cdot 2^{-t}\Big|_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}} - \frac{2\cdot 2^{-t}}{(\ln 2)^2}\Big|_{\sqrt{n-1}}^{\sqrt{n}}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} RHS = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{(\ln 2)^2}$. 有限.

3. 拆项法

$p>\frac{1}{2}$. $x\ne 2k\pi$. $|a|\le 1$. Pf：$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p + a\cos nx}$ 收敛.

$$\frac{\cos nx}{n^p + a\cos nx} = \frac{\cos nx}{n^p} - a\cdot\frac{\cos^2 nx}{(n^p + a\cos nx)\cdot n^p} = v_n - a\cdot w_n$$

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

对 $\sum v_n$：部分和有界 + $\frac{1}{n^p}\downarrow 0$.

对 $\sum w_n$ $0 < \frac{\cos^2 nx}{(n^p + a\cos nx)n^p} < \frac{1}{(n^p-1)n^p} \sim \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$

$$(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p} = (-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{p+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n^{p+\frac{1}{2}}}$$

故 仅 $p>\frac{1}{2}$ 时 绝对收敛.

$-\frac{1}{2}<p\le\frac{1}{2}$ 时：$\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n^{p+\frac{1}{2}}}$ 收敛，$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ 单调有界 $\Longrightarrow$ 条件收敛.

$p\le-\frac{1}{2}$ 时 通项 $\not\to 0$. 发散

5. Raabe 判别法：正项级数 $\sum u_n$，$u_n>0$，则

(1) 若从某项起有 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\ge\gamma>1$. 则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若从某项起有 $n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\le 1$，则 $\sum u_n$ 发散.

Pf：不妨从 $n=1$ 起

(1) $\frac{u_n}{u_{n+1}}\ge 1+\frac{\gamma}{n}\Longrightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}$

令 $1<a<\gamma$. $v_n=\frac{1}{n^a}$. 则 $\sum v_n$ 收敛.

$$\frac{v_n}{v_{n+1}}=\frac{(n+1)^a}{n^a}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^a>1+\frac{a}{n}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+\frac{\gamma}{n}}<\frac{1}{1+\frac{a}{n}}<\frac{v_{n+1}}{v_n}$$

即 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}\Longrightarrow\sum u_n$ 收敛

$\left(\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}}\le\frac{u_n}{v_n}\le\cdots\le\frac{u_1}{v_1}=p\Rightarrow u_n\le p v_n\right)$

(2) $\frac{u_n}{u_{n+1}}\le 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}$

$\Rightarrow\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$. $\sum\frac{1}{n}$ 发散 $\Rightarrow\sum u_n$ 发散

6. $0<a_1<a_2$. $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，试证：$\sum\frac{1}{a_n}$ 收敛.

Pf：$a_n\nearrow$. 则 $a_{n-1}>\frac{1}{2}a_n$

$$a_{n+1}>a_n+\frac{1}{2}a_n=\frac{3}{2}a_n$$

$$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}<\frac{2}{3}\Rightarrow\sum\frac{1}{a_n}\text{ 收敛}$$

7. 正项级数 $\sum a_n$ 通项 $a_n>0$. $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ 试证：

(1) 若 $\sum a_n$ 收敛，则 $\sum\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛. $\forall p$.

(2) 若 $p>1$. 则 $\sum\frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(3) 若 $p\le 1$. $\sum a_n$ 发散. 则 $\sum \frac{a_n}{S_n^p}$ 发散

Proof: (1) 若 $\sum a_n = S_n \to S$. 则 $S_n^p \to S^p > 0$ 且有限.

$$\frac{a_n}{S_n^p} \to \frac{a_n}{S^p} \quad 收敛$$

(2) $p>1$ 时. $\frac{1}{x^p} > \frac{1}{S_n^p}$

$$\frac{a_n}{S_n^p} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^p} = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{S_n^p}dx < I_n = \int_{S_{n-1}}^{S_n} \frac{1}{x^p}dx$$

而 $\int_{a_1}^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ 收敛 $\Rightarrow \frac{a_n}{S_n^p}$ 收敛

(3) $p\le 1$ 时 $\sum a_n$ 发散.

则 $\frac{a_n}{S_n^p} \ge \frac{a_n}{S_n}$ (对充分大的 n. $S_n > 1$) . 下证 $\frac{a_n}{S_n}$ 发散

由正项级数. $S_n \nearrow$. $\left(\frac{a_n}{S_n} = 1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} ? \right)$

对充分大的 q. $\sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{a_k}{S_k} \ge \frac{1}{S_{n+q}} \cdot (a_{n+1} + \dots + a_{n+q}) = 1 - \frac{S_n}{S_{n+q}} > \frac{1}{2}$

由 Cauchy 收敛准则知 发散

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n}$ 绝对收敛性

"绝对 + 绝对 = 绝对. 绝对 + 条件 = 条件."

$$\frac{\cos(n+\frac{1}{n})}{n} = \frac{\cos n \cos\frac{1}{n} - \sin n \sin\frac{1}{n}}{n} = \frac{\cos n}{n} - \frac{2\cos n \sin^2\frac{2}{n}}{n} - \frac{\sin n \cdot \sin\frac{1}{n}}{n}$$

而 $\sum \frac{\cos n}{n}$ 条件. $\left|\frac{\cos n \sin^2\frac{2}{n}}{n}\right| \le \frac{4}{n^3}$, $\left|\frac{\sin n \sin\frac{1}{n}}{n}\right| \le \frac{1}{n^2}$ 绝对

$\therefore$ 原级数条件