第10讲：函数极限、连续性习题课

(一) 求下列极限.

(1). $\lim\limits_{k\to+\infty}(|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}$; (2). $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$;

(3). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{x}{n^2}+\sin\dfrac{2x}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{nx}{n^2}\right)$; (4). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

(二). EX2.2/4; 7; 8; 9; 10; 13.

(三). ch2综/1; 2; 3; 5; 6.

(四) 作业：习题(一)/(1),(2),(3),(4); EX2.2/7; 8; 9; 13.

ch2综/1; 2; 3; 5.

提示：ch2综/1：$f(x)=(1-D(x))x$ 且 $xD(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续;

ch2综/2：令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$, $x\in[0,1]$, 则 $g(x)\in C[0,1]$, 且 $g(0)g(1)\le0$.

ch2综/3：令 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$, $x\in(\lambda_1,\lambda_2)$;

$g(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$, $x\in(\lambda_2,\lambda_3)$, 则 $f(x)\in C(\lambda_1,\lambda_2)$ 且 $\begin{cases}f(\lambda_1+0)=+\infty\\ f(\lambda_2-0)=-\infty\end{cases}$

$g(x)\in C(\lambda_2,\lambda_3)$ 且 $\begin{cases}g(\lambda_2+0)=+\infty\\ g(\lambda_3-0)=-\infty.\end{cases}$

ch2综/5：令 $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$, $x\in[0,1-\frac{1}{n}]$, 则 $g(x)\in C[0,1-\frac{1}{n}]$

且 $g(0)+g(\frac{1}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)=0$, $\exists[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$, 使 $g(\frac{k}{n})g(\frac{k+1}{n})<0$, (1).

第10讲（续）

（一）熟练掌握以下6个等价无穷小（设 $u\to 0$）

(1). $\sin u \sim u$；(2) $1-\cos u \sim \frac{1}{2}u^2$；(3). $e^u-1\sim u$；

(4). $a^u-1\sim u\ln a$；(5). $\ln(1+u)\sim u$；(6) $(1+ku)^\alpha-1\sim k\alpha u$.

（其中 $a>0, a\neq 1$, k,α 为常数且 $k\cdot\alpha\neq 0$）.

（二）掌握以下一批等价无穷小（设 $u\to 0$, $\forall m>0$）

(1). $\sin^m u\sim u^m$；(2). $(1-\cos u)^m\sim(\frac{1}{2}u^2)^m$；(3) $(e^u-1)^m\sim u^m$

(4). $(a^u-1)^m\sim u^m(\ln a)^m$；(5) $(\ln(1+u))^m\sim u^m$；(6) $(\tan u)^m\sim u^m$；

(7) $(\arcsin u)^m\sim u^m$；(8). $(\arctan x)^m\sim u^m$；(9) $\tan u-\sin u\sim\frac{1}{2}u^3$.

（三）熟练掌握以下这些无穷大（$n\in N^*$, $x\in R^+$, $\forall a>1, \alpha>0, m>0$）

(1). $n^n>>n!>>a^n>>n^\alpha>>(\ln n)^m$ （n充分大）

(2) $x^x>>a^x>>x^\alpha>>(\ln x)^m$ （x充分大）

（四）熟练掌握以下两个等价无穷大（n充分大）

(1). $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\sim\ln n$；(2) $\sqrt[n]{n!}\sim\frac{1}{e}n$.

第10讲：习题参考解法

解(一)/(1)：设 $\alpha=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots|a_n|\}$，则 $\alpha>0$ 是常数，

且 $\alpha^k\le|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k\le n\alpha^k \Rightarrow$

$\alpha\le(|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}\le n^{\frac{1}{k}}\alpha$ 且

$\lim\limits_{k\to\infty}\alpha=\alpha=\lim\limits_{k\to\infty}n^{\frac{1}{k}}\alpha=n^0\cdot\alpha=\alpha$，依夹逼准则，

$\lim\limits_{k\to\infty}(|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}=\alpha=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|\}$.

解(一)/(2)：$x\to0$ 时，$\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\to\dfrac{1+1+\cdots+1}{n}=1$.

因此，(2)是"1^∞"型极限，可用 $\lim\limits_{u\to0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$ 尝试求解

$$\because\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\left(\left(1+\frac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}\right)^{\frac{n}{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}}\right)^{\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}}$$

且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(a_1^x-1)+(a_2^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}=\dfrac{1}{n}\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x-1}{x}+\dfrac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\dfrac{a_n^x-1}{x}\right)$

$=\dfrac{1}{n}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

故原式 $=e^{\ln\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

解(一)/(3)：利用 $2\sin\beta\sin\alpha=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$，且令 $\frac{\alpha}{n^2}=x$

则当 $x\neq 2k\pi, k\in Z$ 时.

$$\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx=\frac{2\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{5}{2}x+\cdots+\cos(n-\frac{1}{2})x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{-2\sin\frac{n+1}{2}x\sin(-\frac{n}{2}x)}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$\frac{\sin(\frac{n+1}{2}\cdot\frac{\alpha}{n^2})\sin\frac{n}{2}\frac{\alpha}{n^2}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}$$, 利用 $\sin u\sim u\ (u\to 0)$

$$原式=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{(n+1)}{2n^2}\alpha\sin\frac{\alpha}{2n}}{\sin\frac{\alpha}{2n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{n+1}{2n^2}\alpha)(\frac{\alpha}{2n})}{\frac{\alpha}{2n^2}}=\frac{\alpha}{2}.$$

练(一)/(4). 当 $x\to 0$ 时, $u=1-\cos x\to 0$, 而 $1-\cos u\sim\frac{u^2}{2}, (u\to 0)$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(1-\cos x)^2}{2}}{x^4}\ \underset{x\to 0}{\overset{(1-\cos x)^2\sim(\frac{x^2}{2})^2}{=\!=\!=}}\ \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{x^2}{2})^2}{2x^4}=\frac{1}{8}.$$

练 eX 2.12/4: 已知 $a\leq f(x)\leq b$. $\forall x\in[a,b]$. $\Rightarrow f(a)\geq a, f(b)\leq b$.

设 $g(x)=f(x)-x$, $x\in[a,b]$, 则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 中 C, 且 $\begin{cases}g(a)=f(a)-a\geq 0\\ g(b)=f(b)-b\leq 0\end{cases}$

1) 若 $g(a)=0$ 或 $g(b)=0$ 则有 $f(a)=a$ 或 $f(b)=b$, 即 a 或 b 是 $f(x)$ 的不动点.

2) 若 $g(a)>0$ 且 $g(b)<0$, 依闭区间 $[a,b]$ 上 C 函数的介值性 Th, $\exists x_0\in(a,b)$, 使 $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=x_0$, 即 x_0 是 $f(x)$

(2)

在(a,b)中的不动点.

综上(1),(2)知,必有不动点$x_0\in[a,b]$使$f(x_0)=x_0$.

证ex2.12/7: $\because f\in C[a,b]$, $\therefore f$在$[a,b]$上有最小值$f(\alpha)=m$, 最大值$f(\beta)=M$, $\alpha,\beta\in[a,b]$. 不妨设$\alpha<\beta$, 则$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$.

由$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[a,b]\Rightarrow f(x_1)\in[m,M]$ 即 $m\le f(x_1)\le M$, $m\le f(x_2)\le M$, $\cdots$, $m\le f(x_n)\le M$ $\Rightarrow m\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le M$

即$f(\alpha)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\le f(\beta)$ 且f在$[\alpha,\beta]$上C.

由闭区间上C函数的介值性Th, $\exists x_0\in[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 使

$f(x_0)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$. 令$\xi=x_0$即可.

证ex2.12/8: 已知$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在, 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\in\mathbb{R}$. 则对$\forall\varepsilon>0$, $\exists X_0>0$, 对$\forall x>X_0$, $|f(x)-A|<\varepsilon$恒成立, 从而

$|f(x)|=|f(x)-A+A|\le|f(x)-A|+|A|<\varepsilon+|A|$ $(\forall x>X_0)$.

又f在$[a,+\infty)$中$C\Rightarrow f$在闭区间$[a,X_0]$中$C\Rightarrow f$在$[a,X_0]$中有界, 设$\exists M_0>0$, 使$|f(x)|\le M_0$, $\forall x\in[a,X_0]$.

(3).

取 $M=\max\{\varepsilon+|A|, m_0\}$，则 $M>0$ 且 $|f(x)|\le M$，$\forall x\in[a,+\infty)$.

即 f 在 $[a,+\infty)$ 中有界。

证 ex2.2/9：(1) ∵ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}=0=A$.

∴ 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X_0>0$，对 $\forall |x|>X_0$，$|f(x)-0|<\varepsilon$ 恒成立.

(2). ∵ $1+x^2$，$1-x^2+x^4\in(-\infty,+\infty)$ 中 C 且 $1-x^2+x^4=(x^2-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$

∴ $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1-x^2+x^4}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中 $C\Rightarrow f$ 在 $[-X_0,X_0]$ 中 C，

$\Rightarrow f$ 在 $[-X_0,X_0]$ 中有界，$\Rightarrow \exists m_0>0$，使 $|f(x)|\le m_0$，$\forall x\in[-X_0,X_0]$.

取 $M=\max\{\varepsilon, m_0\}$，则 $M>0$，且 $|f(x)|\le M$，$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

解 ex2.2/10：Th2.12 告诉我们，C 函数将闭区间映成

闭区间. 因此，(1)，(2)，(3) 不可能发生；对于(4)，只要

令 $f(x)=\frac{1}{x}+1$，$x\in(0,1)\hat{=}I$，则 $f(I)=(2,+\infty)$。

证 ex2.2/13：先学习 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\in\mathbb{R}$ 的 Cauchy 准则，

即 Th1.36：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\begin{cases}0<|x_1-x_0|<\delta\\0<|x_2-x_0|<\delta\end{cases}$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

$\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在(收敛).

(4).

本题中，已知$f(x)$在(a,b)中一致C $\Longleftrightarrow$ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0$，①②

对$\forall x_1, x_2 \in (a,b)$，只要$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$，则$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。

特别地，当$\begin{cases} a<x_1<a+\delta(\varepsilon) \\ a<x_2<a+\delta(\varepsilon) \end{cases}$时，$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$且$x_1, x_2 \in (a,b)$。③

则$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$。④ 依函数极限的Cauchy准则(T人1.36)

知：$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$存在，即$f(a+0)$存在。

同理，若$x_1, x_2 \in (a,b)$且$\begin{cases} b-\delta(\varepsilon)<x_1<b \\ b-\delta(\varepsilon)<x_2<b \end{cases}$时，$|x_1-x_2|<\delta(\varepsilon)$

则$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，依Cauchy准则，$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b-0)$存在。

~~证ch2练~~/1：$\because D(x)=\begin{cases} 1, & x\in Q \\ 0, & x\notin Q \end{cases}$ $\therefore 1-D(x)=\begin{cases} 0, & x\in Q \\ 1, & x\notin Q \end{cases}$

令$g(x)=x(1-D(x))$，$x\in R$，则$g(x)=f(x)=\begin{cases} 0, & x\in Q \\ x, & x\notin Q \end{cases}$

$\because f(0)=0$ 且$0\le |f(x)|=|x(1-D(x))|\le |x|$ 且$\lim\limits_{x\to 0}|x|=0=\lim\limits_{x\to 0}0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$。$\therefore f(x)$在$x=0$处C。

若$x\neq 0$时，$f(x)$也C，则从$f(x)=x(1-D(x)) \Rightarrow$

$1-D(x)=\frac{f(x)}{x}$当$x\neq 0$时也C，$\Rightarrow D(x)=1-(1-D(x))$也

在$(-\infty,0)$或$(0,+\infty)$中C，矛盾！$\therefore x\neq 0$时，$f(x)$间断

(5)

证ch2练/2：设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，$x\in[0,1]$，则

$g(0)=f(0)-\frac{1}{2}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-\frac{1}{2}$，$g(1)=\frac{|1-x_1|+|1-x_2|+\cdots+|1-x_n|}{n}-\frac{1}{2}$

$=\frac{(1-x_1)+(1-x_2)+\cdots+(1-x_n)}{n}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=-g(0)$

$\Rightarrow g(0)g(1)=-g^2(0)\le 0$，

(1°) 若 $g(0)=0$ 或 $g(1)=0$，则 $f(0)=\frac{1}{2}$ 或 $f(1)=\frac{1}{2}$，且 $0,1\in[0,1]$。

(2°) 若 $g(0)g(1)<0$，则从 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且闭区间上C函数的零值性定理知，$\exists x_0\in(0,1)$，使 $g(x_0)=0\Leftrightarrow f(x_0)=\frac{1}{2}$。

证ch2练/3：设 $f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$　$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$。

则 f 在 (λ_1,λ_2)，(λ_2,λ_3) 上都连续，且从 $\begin{cases}f(\lambda_1+0)=+\infty\\ f(\lambda_2-0)=-\infty\end{cases}$

可知，$\exists x_1,x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$，使 $f(x_1)>0$，$f(x_2)<0$ 且 $x_1<x_2$。

利用 f 在 $[x_1,x_2]$ 上C及 $f(x_1)f(x_2)<0$ 及闭区间上C函数的零值性定理，$\exists \xi_1\in(x_1,x_2)$，使 $f(\xi_1)=0$，即 f 在 (λ_1,λ_2) 中有一个零点 ξ_1，同理，利用 $\begin{cases}f(\lambda_2+0)=+\infty\\ f(\lambda_3-0)=-\infty\end{cases}$ 及 $f\in(\lambda_2,\lambda_3)$ 上C可知

$\exists \alpha_1,\alpha_2\in(\lambda_2,\lambda_3)$ 且 $\alpha_1<\alpha_2$，$f(\alpha_1)>0$，$f(\alpha_2)<0$，

在$[\alpha_1,\alpha_2]\subset(\lambda_2,\lambda_3)$上,对$f(x)$应用零值定理可知,$\exists\, \xi_2\in[\alpha_1,\alpha_2]$,

即$\xi_2\in(\lambda_2,\lambda_3)$,使$f(\xi_2)=0$,即$f$在$(\lambda_2,\lambda_3)$中有零点$\xi_2$。

证ch2练/5:令$g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$,$x\in[0,1-\frac{1}{n}]$.

则$g(x)$在$[0,1-\frac{1}{n}]=[0,\frac{n-1}{n}]$中C且$g(0)=f(\frac{1}{n})-f(0)=f(\frac{1}{n})-f(1)$

$g(\frac{1}{n})=f(\frac{2}{n})-f(\frac{1}{n})$,$g(\frac{2}{n})=f(\frac{3}{n})-f(\frac{2}{n})$,…$g(1-\frac{1}{n})=f(1)-f(\frac{n-1}{n})$

$\Rightarrow g(0)+g(\frac{1}{n})+g(\frac{2}{n})+\cdots+g(1-\frac{1}{n})=0$,从$\exists\, k\in N$使

$g(\frac{k}{n})\cdot g(\frac{k+1}{n})\leq 0$. 在闭区间$[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset[0,\frac{n-1}{n}]$中对

$g(x)$应用零值定理,知$\exists\, x_0\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$,使$g(x_0)=0$. 即

$f(x_0+\frac{1}{n})=f(x_0)$,取$\xi=x_0$,则$\xi\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset[0,1-\frac{1}{n}]$,使$f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$.

证ch2练/6:令$f(x)=x^5+\frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}-72$,$x\in[0,3]$.

则$f(x)$在$[0,3]$中C,且$f(0)=1-72=-71<0$,$f(3)=3^5-72+\frac{\cos 3}{1+3^2+\sin^2 3}$

$=243-72+\frac{\cos 3}{10+\sin^2 3}>1>0$. 对$f(x)$在$[0,3]$中应用零值定理,

知,$\exists\, x_0\in(0,3)$,使$f(x_0)=0$. 即x_0为实数且满足方程:

$x^5+\frac{\cos x}{1+x^2+\sin^2 x}=72$,即:$x_0^5+\frac{\cos x_0}{1+x_0^2+\sin^2 x_0}=72$

第10讲：函数极限、连续性习题课（预告）

(一) 求下列极限： (2023.10.8日)

(1) $\lim\limits_{k\to\infty}(|a_1|^k+|a_2|^k+\cdots+|a_n|^k)^{\frac{1}{k}}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{a}{n^2}+\sin\dfrac{2a}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{na}{n^2}\right)$， (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$.

(二). ex2.12/4；7；8；9；10；13.

(三). ch2综/1；2；3；5；6：

(四) 作业：必选(一)/(1),(2),(3),(4)： ex2.12/7；8；9；13.

ch2综/1；2；3；5.

提示：ch2综/1，$f(x)=(1-D(x))x$，而 $xD(x)$ 仅在 $x=0$ 处 C.

ch2综/2：令 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}$，$x\in[0,1]$，则 $g(0)g(1)\le0$，且 $g(x)\in C[0,1]$.

ch2综/3：令 $f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$，$x\in(\lambda_1,\lambda_2)$，$g(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$，

$x\in(\lambda_2,\lambda_3)$，则 $f(x)\in C(\lambda_1,\lambda_2)$，$g(x)\in C(\lambda_2,\lambda_3)$ 且 $\begin{cases}f(\lambda_1+0)=+\infty\\ f(\lambda_2-0)=-\infty\end{cases}$，$\begin{cases}g(\lambda_2+0)=+\infty\\ g(\lambda_3-0)=-\infty\end{cases}$.

ch2综/5：令 $g(x)=f(x+\frac{1}{n})-f(x)$，$x\in[0,1-\frac{1}{n}]$，则 $g(x)\in C[0,1-\frac{1}{n}]$ 且

$g(0)+g(\frac{1}{n})+g(\frac{2}{n})+\cdots+g(\frac{n-1}{n})=f(1)-f(0)=0$，$\exists\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$ 使 $g(\xi)=0\Leftrightarrow f(\xi+\frac{1}{n})=f(\xi)$。