目录

第 1 讲　数列极限

1.1　几个常用的记号

1. $\forall \leftarrow A \leftarrow any$: 任意给定的一个；给定后为常数

2. $\exists \leftarrow E \leftarrow exist$: 存在一个；通常不唯一

3. $\sup E$: 数集 E 的最小上界，即 E 的上确界 (supremum)

   $\sup E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \leq \sup E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, \sup E - \varepsilon < x_0$.

4. $\inf E$: 数集 E 的最大下界，即 E 的下确界 (infimum)

   $\inf E$ 同时满足两条件：

   (a) $\forall x \in E, x \geq \inf E$;

   (b) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x_0 \in E, x_0 < \inf E + \varepsilon$.

例 1.1. *设* $E = \{1, 3, 5, 8\} F = (-\sqrt{3}, \pi]$*, 则:*
$\sup E = 8, \inf E = 1, \sup F = \pi, \inf F = -\sqrt{3}$*. 且有*

1. $\sup E = -\inf(-E)$*;*

2. $\inf F = -\sup(-F)$*;*

注记. 这里的 $-E$ 表示 E 的相反数集合，即 $-E = \{-e : e \in E\}$.

1.2　微积分或数学分析必须建立在实数系上 R 上

理由: 极限运算时微积分的最基本运算, 而有理数集合 Q 关于极限运算时不封闭的. 例如: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e; \forall n \in N, (1+\frac{1}{n}) \in Q$, 但 $e \notin Q$.

又如,$\forall n \in N, a_n = \sum\limits_{m=1}^{n} \frac{1}{m^2} \in Q$, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{\pi^2}{6} \notin Q$.

实数集合 R 在数轴上的点是连续不断的, 且关于极限运算时封闭的. 因此, 称实数集 R 是具有连续性. 实数集 R 的连续性也称为实数集的完备性.

描述实数集 R 连续性的公理通常有五个:

1. 确界存在原理;
2. 单调有界极限存在准则;
3. 极限存在的柯西 (Cauchy) 准则;
4. 闭区间套定理;
5. 列紧性原理, 即有界数列必有收敛子列定理.

这五个公理是互相等价的, 本课程采用" 确界存在原理" 作为实数集 R 连续性的公理.

注记. *这五条公理与课本 1.1.3 的连续性公理是等价的, 即任意一个公理都可以推导出另外四个公理. 因此这里说这五个等价命题描述了 R 的连续性.*

公理 1.2. *确界存在原理*

有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.

1.3 数列极限的科学定义

设数列 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 科学的定义如下:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N*, \forall n > N$ 都有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 则 $\{a_n\}$ 以常数 a 为极限, 记为 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 或 $a_n \to a(n \to \infty)$.

事实上, 所有的收敛的有理数列, 其极限点的全体即是实数集 R. 即实数集 R 是有理数列的极限值构成的.

注记. *1.Q 对极限是不封闭的; 2. 由 Q 组成的数列的极限可以是实数; 3. 由 Q 组成的数列的极限只能是实数; 4. 由 Q 组成的所有收敛数列, 他们的极限的集合, 恰好就是 R, 不多不少.*

理由如下:

对 $\forall x \in R$, 设 x 的小数表示为:$x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 则有理数列:$a_0, a_0.a_1, a_0.a_1a_2, \cdots$ 当 $n \to \infty$ 时, 其极限为 x. 若 x 是有理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是有限小数或循环小数, 若 x 是无理数, 则 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 是无限不循环小数, 则极限点 x 是无理数.

注记. *此处 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$, 其中每一个 a_i 都是一个数字, a_0 是整数部分, $a_1a_2a_3\cdots$ 是小数部分. 比如, $x = 3.1415926\cdots$, 那么 $a_0 = 3, a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 5, a_5 = 9, a_6 = 2, a_7 = 6, \cdots$.*

可以由 $x = a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 构造出一个数列 $\tau_1 = a_0, \tau_2 = a_0.a_1, \tau_3 = a_0.a_1a_2, \cdots$, 说 x 为极限指的, 是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n = x$.

都用 x 代指, 是因为我这里不能确定 x 是不是有限小数, 有理数还是无理数. 但是 x 是数列 $\{\tau_n\}$ 的极限是确定的.

1.4 极限存在的两个常用准则

1. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n (\inf a_n)$.

2. 夹逼准则 (即两边夹准则): 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $a_n \le b_n \le c_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

证明. 单调增有界极限存在.

设数列 $\{a_n\}$ 单调增且有上界, 由确界存在定理,$\{a_n\}$ 有上确界. 令 $\sup a_n = \beta$, 则 β 是 $\{a_n\}$ 满足以下两点:

1. $\forall n \in N, a_n \le \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in \{a_n\}, \beta - \varepsilon < a_{n_0}$.

又因为 $\{a_n\}$ 单调增, 故 $\forall n > n_0, a_n \le a_{n_0} > \beta - \varepsilon$, 且 $a_n \ge \beta < \beta + \varepsilon$. 即 $|\beta - a_n| < \varepsilon$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \beta$. □

证明. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in N*, \forall n > N, |a_n - a| < \varepsilon$. 又 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in N*, \forall n > N, |c_n - a| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 则 $\forall n > N, a_n \le b_n \le c_n$, 故 $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. □

例 1.3. 下列 a, b, q, c_1, c_2 皆为常数*)*.

1. 设 $|q| < 1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} aq^n = 0$;

2. 设 $a > 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$;

3. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

4. 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, 证明 $\lim_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b$. 即线性组合的极限等于极限的线性组合, 称此为极限的线性性质.

数列的极限具有线性性质, 同理函数极限也是具有线性性质的, 统称为极限的线性性质. 由极限的线性性质, 可导出微积分中绝大多数概念也具有线性性质. 如函数的导数、导数、微分、积分, 都具有线性性质.

作业. ex1.2:1(2)(4);3;4;5;6;8(5);15(1);19.

第 2 讲　数列极限的性质与应用

2.1　复习数列极限的线性性质

设 a, b, c_1, c_2 为常数且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$, 证明：$\lim_{n\to\infty}(c_1a_n + c_2b_n) = c_1a + c_2b = c_1\lim_{n\to\infty} a_n + c_2\lim_{n\to\infty} b_n$.

从上述极限的线性性质，不难得到以下结论：

1. 当 $c_1 = c_2 = 1$ 时, $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$;
2. 当 $c_1 = 1, c_2 = -1$ 时, $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$;
3. 当 $c_1 = k, c_2 = 0$ 时, $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\lim_{n\to\infty} a_n$.
4. 数列的线性性质可推广到任意有限个收敛数列的情形: 设 $a_{1n} \to a_1, a_{2n} \to a_2, \cdots, a_{mn} \to a_m$, 且 $a_1, a_2, \cdots, a_m, c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_1a_{1n} + c_2a_{2n} + \cdots + c_ma_{mn})\\ =&c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_ma_m\\ =&c_1\lim_{n\to\infty} a_{1n} + c_2\lim_{n\to\infty} a_{2n} + \cdots + c_m\lim_{n\to\infty} a_{mn}\end{aligned}$$
对 $\forall m \in N^*$ 成立.

2.2　数列极限的" 四性"

1. 有界性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 有界, 反之未必;
2. 唯一性: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则其极限唯一;
3. 保号性: 若 $\{a_n\}$ 收敛且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$,$a_n \geq 0, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \geq 0$;
4. 保序性: 若 $a_n \to a, b_n \to b$, 且 $a_n \leq (\geq) b_n, \forall n \geq n_0$, 则必有 $a \leq (\geq) b$.

2.3 收敛数列极限的四则运算法则

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, 其中 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$.

证明. 仅证 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}(b \neq= 0), n \to \infty$

注意到 $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|}$

不妨设 $b > 0$, 即 $\exists N_1, \forall n > N_1, s.t. b_n > b - \varepsilon$ (a)

取 $\varepsilon < \frac{b}{2}$, 则 $b_n > b - \varepsilon \overset{(a)}{=} \frac{b}{2}$ (b)

由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2, \forall n > N_2, |b_n - b| < \varepsilon$ (c)

得 $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|} \overset{(b)}{<} \frac{|b_n - b|}{b\frac{b}{2}} \overset{(c)}{<} \frac{\varepsilon}{\frac{b^2}{2}}$

□

2.4 例题

例 2.1. *设* $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n, n \in N^*$, *证明:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e \approx 2.7182818128$;
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e = \lim\limits_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{x})^x, x \in R$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1 + \frac{1}{x})^x = e, x \in R$

例 2.2. *证明闭区间套定理: 若* $\{[a_n, b_n]\}$ *是一列闭区间, 满足* $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, *且* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, *则存在唯一的实数* ξ, *使得* $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.

注记. 闭区间套定理, 是刻画实数集 R 的连续性的五个等价公理之一.

为了纪念数学家 Euler(欧拉) 在其中的贡献, 将 $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$ 记为 e. 经计算可知,$e \approx 2.718281828$. 讲义中还证明了 e 是一个无理数, 且将以 e 为底的对数称为自然对数, 记为 $\ln x$, 即 $\ln x = \log_e x$.

作业. ex1.2: 14;15(3)(4);16;18(3);22(2)(4);CH1:3(2).

第 3 讲 数列极限习题课

3.1 习题

1. $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n \in N^*$.
2. $(\frac{1}{n+1}) < \ln(1+\frac{1}{n}) < (\frac{1}{n}), n \in N^*$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$, 即 $\sqrt[n]{n!}e \sim n$.

$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n, n \in N^*$, 证明:

1. $\{a_n\}$ 收敛;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \ln 2$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} + \cdots + \frac{1}{3n+2n} = \ln \frac{5}{3}$;
4. $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \sim \ln n$.

3.2 关于无穷大

1. $\{a_n\} \to +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n > M$.
2. $\{a_n\} \to -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, a_n < -M$.
3. $\{a_n\} \to \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in N^*, \forall n > N, |a_n| > M$.

3.3 Stolz 定理及其应用

定理 3.1 (Stolz 定理)**.** *设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个数列, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, 若*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A$$

, 其中 A 可以是有限数, 也可以是 $\pm\infty$;$\{b_n\}$ 是严格单调递增且趋于 $+\infty$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}}.$$

注记. 完整的利用 *Stolz* 定理的过程要求先证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=A$ 极限存在并求得 A, 然后再利用 *Stolz* 定理求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$. 不过不严谨的直接写出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 也是能接受的.

注记 3.2. 当 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=\infty$ 时,*Stolz* 定理不一定成立. 反例可取 $a_n=(-1)^n, b_n=n$.

3.4 例题

例 3.3. 证明:

1. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$;
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geq 0$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.
3. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

例 3.4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个常数, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n+|a_2|^n+\cdots+|a_m|^n}=\max\{|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_m|\}.$$

例 3.5.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}=\dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}=\dfrac{1}{3}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\dfrac{1}{4}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\dfrac{1}{k+1}$.

定理 3.6. 常用的平均值不等式:

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数, 则有:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

作业. ex1.2:9;13;18(5);20;22(3);23;CH1:10(1);11.

第 4 讲　实数集连续性的五个等价命题

4.1　五个等价命题

1. 确界存在原理: 有上 (下) 界的非空实数集 E 必有上 (下) 确界 $\sup E(\inf E)$.
2. 单调有界极限存在准则: 若数列 $\{a_n\}$ 单调增 (减) 且有上 (下) 界, 则 $\{a_n\}$ 收敛. 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sup a_n(\inf a_n)$.
3. 闭区间套定理: 若 $\{[a_n, b_n]\}$ 是一列闭区间, 满足 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1, 2, \cdots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, 则存在唯一的实数 ξ, 使得 $\xi \in [a_n, b_n], n = 1, 2, \cdots$.
4. 列紧性原理: 若 $\{a_n\}$ 有界且含无穷多项, 则 $\{a_n\}$ 必有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$.
5. 柯西 (Cauchy) 准则: 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in N^*, \forall n, m > N, |a_n - a_m| < \varepsilon$.

例 4.1. *证明确界原理推连续性.*

由 $Y \neq \emptyset$, 故 X 有上界,

由确界原理, X 有上确界, 同理 Y 有下确界, 记 $c_1 = \sup X, c_2 = \inf Y$, (目标: 找到 $c, s.t. \forall a \in X, b \in Y, a \le c \le b$)

若 $c_1 \in X$, 则取 $c = c_1$.

若 $c_1 \notin X$, 则 $c_1 \in Y.c_2 \in Y \Rightarrow c = c_2; c_2 \notin Y \Rightarrow c_2 \in X, c_2 < c_1$ 这与 $\forall x \in X, y \in Y, x < y$ 矛盾.

4.2　Stolz 定理的证明

4.3　例题

例 4.2. *收敛的数列 $\{a_n\}$ 被称为"Cauchy 列"或"基本列".*

1. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列;

2. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in N^*$, 证明 $\{a_n\}$ 不是 Cauchy 列.

4.4 函数极限 24 种科学定义

设 x_0 为常数

$\Rightarrow$ 表示" 则有...", 在此处在 $\Leftrightarrow$ 的子语句之中.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$
5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) > M.$
6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) > M.$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) < -M.$
9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$
12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists\delta > 0, \forall x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
14. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
15. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$
16. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x > X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$
18. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| > M.$
19. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) > M.$
20. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists X_0 > 0, \forall x < -X_0 \Rightarrow f(x) < -M.$

21. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)>M.$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0 \Rightarrow f(x)<-M.$

24. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists X_0>0,\forall |x|>X_0 \Rightarrow |f(x)|>M.$

作业. ex1.2:17(2)(3)(4),24;CH1:3(1),7,9,10(2),11.

第 5 讲 函数极限 24 种

5.1 数列 $\{a_n\}$ 极限 4 种科学定义

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,|a_n-a|<\varepsilon.$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} +\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,a_n>M.$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} -\infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,a_n<-M.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \infty \Leftrightarrow \forall M>0,\exists N\in N^*,\forall n>N,|a_n|>M.$

例 5.1. $\forall k\in N^*$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} n^k=+\infty$.

5.2 函数极限的 "$\varepsilon-\delta$" 定义法

定义 5.2. 设 x_0 为常数, 函数在 x_0 处的极限为 a 定义为:

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon.$

若 x 从大于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的右极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,x_0<x<x_0+\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$; 若 x 从小于 x_0 的一侧趋近于 x_0, 则称为 x_0 的左极限, 记为 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x,x_0-\delta<x<x_0 \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon$.

定理 5.3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=a=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$.($x_0$ 为常数)

定理 5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} =a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

例 5.5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$

5.3 函数极限的四则运算法则

定理 5.6. *设* x_0, a, b, c_1, c_2 *为常数, 令* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, *则:*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 a + c_2 b$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = a\cdot b$; *特别地,* $\lim\limits_{x\to x_0} f^2(x) = a^2$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}(b\neq 0)$.

注记 5.7. *函数极限:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \in R$ *也是有"四性", 即局部有界性, 唯一性, 保号性, 保序性.*

注记 5.8. *局部有界性的证明: 设函数* $y = f(x)$ *的定义域为* I, *点* $x_0 \in I$, *且* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x)| < |a| + \varepsilon$. *因此, 函数* $f(x)$ *在* x_0 *的某邻域内有界, 但* $f(x)$ *在整个定义域* I *内未必有界.*

5.4 3 个重要极限及其证明

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
2. $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \dfrac{1}{x})^x = e$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & n = m; \\ 0, & n < m; \\ \infty, & n > m. \end{cases}$

作业. ex1.3:1(2)(3);2(2)(4);3(2);5(1)(2);9(3)(4);10(3);CH1:13.

第 6 讲 函数极限习题课

6.1 24 种函数极限的否定形式

设 x_0, A 为常数.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq M$.

5. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \leq M$.

6. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.

7. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \geq -M$.

8. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow f(x) \geq -M$.

9. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.

10. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

11. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

12. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall\delta > 0, \exists x, x_0 - \delta < x < x_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

14. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

15. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq A \Leftrightarrow \exists\varepsilon_0 > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x) - A| \geq \varepsilon_0$.

16. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.

17. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x > X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.

18. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

19. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.

20. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, x < -X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.

21. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

22. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq +\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow f(x) \leq M$.

23. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \neq -\infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow f(x) \geq -M$.

24. $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) \neq \infty \Leftrightarrow \exists M > 0, \forall X_0 > 0, \exists x, |x| > X_0 \Rightarrow |f(x)| \leq M$.

注记 6.1. *24 种函数极限的肯定形式 (科学定义) 在第 4 讲: 实数集连续性的五个等价命题的附 (3) 与附 (4) 两页中.(助教注: 即 4.4). 先写出每种极限的肯定形式, 就容易写出对应的否定形式.*

6.2 几个基本概念

(1) 以零为极限的变量称为无穷小量; 绝对值无限增大的变量称无穷大量. 常数中只有零是无穷小量, 非零无穷小与无穷大具有倒数关系.

例 6.2. *$x \to 0$ 时,$\sin x, x^m(m>0), \tan x, e^x-1, 1-\cos x$ 都是无穷小量;*

$n \in N^*, n \to$ 时, $n^n, n!, a^n(a>1), n^\alpha(\alpha>0), \ln n$ 都是无穷大量.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, 且 $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 则称 $f(x)$ 在 x_0 处连续, 若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续, 则称 $f(x)$ 在 I 上连续. 当 $f(x)$ 在 x_0 处连续时, 有 $f(x_0) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 即连续函数的极限与函数值可以交换次序.

(3) 幂 (x^α, α 为常量), 指数 ($a^x, a>0$), 三角函数 ($\sin x, \cos x, \tan x$), 对数函数 ($\log_a x, a>0, a\neq 1$), 指数函数 (e^x), 反三角函数 ($\arcsin x, \arccos x, \arctan x$), 双曲函数 ($\sinh x, \cosh x, \tanh x$) 等函数在其定义域内均连续.

一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.

6.3 无穷大的大小

例 6.3. *设 a, α, m 为常数, 且 $a>1, \alpha>0, m>0$, 证明:*

1. *$n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha >> (\ln n)^m$, 在 $n \to \infty, n \in N^*$ 时成立; 其中 $n^n >> n! \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!} = +\infty$, 称为 n^n 是 $n!$ 的高阶无穷大.*
2. *$x^x >> a^x >> x^\alpha >> (\ln x)^m$, 在 $x \to +\infty, x>0, x \in R$ 时成立.*

6.4 例题

例 6.4. *证明:*

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$;
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$;
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a, a>0, a\neq 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha, \alpha\neq 0$.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2+3x-5}{x^2+6})^{4x}=e^{12}$.

注记. 上述例 $1\sim 6$ 今后可作为公式直接使用, 并可记为: 当 $\to 0$ 时,

1. $\dfrac{1-\cos x}{x^2}\sim\dfrac{1}{2}$;
2. $\arcsin x\sim x$;
3. $\ln(1+x)\sim x$;
4. $l^x-1\sim x$;
5. $a^x-1\sim\ln a\cdot x$;
6. $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha\cdot x$.

作业. ex1.3:4;9(1)(2);10(1)(2)(4);11(1)(2).

第 7 讲 函数连续性与无穷小 (大) 的比较

7.1 函数 $y=f(x)$ 的连续性

设 x_0 是常数,

(1) $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 处间断 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$: 称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

$f(x)$ 的间断点分类: $\begin{cases}\text{(I) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 均存在的间断点为第一类间断点;}\\ \text{(II) } f(x_0-0), f(x_0+0) \text{ 至少有一个不存在的间断点为第二类间断点.}\end{cases}$

例 7.1. 六类基本初等函数 *(幂, 指数, 三角, 对数, 指数, 反三角, 双曲)* 在其定义域内均连续. 如 $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 在 $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ 时连续, 且从 $f(\dfrac{\pi}{2}-0)=+\infty, f(\dfrac{\pi}{2}+0)=-\infty$ 可知 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处第二类间断点.

又如 $f(x)=sgnx=\begin{cases}1, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -1, & x<0.\end{cases}$ 在 $x=0$ 处, $f(0-0)=-1, f(0+0)=1, f(0)=0$, 故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处第一类间断点.*(跳跃间断点)*

定理 7.2. 连续函数的和, 差, 积, 商仍是连续函数.

例 7.3. 设 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ 在区间 I 上连续, 且 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 为常数, 则线性组合 $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_mf_m(x)$ 在 I 上连续. 这表明连续函数具有线性性.

例 7.4. 连续的函数 $y=f(x)$ 若有反函数 $x=g(y)$ 或写为 $y=g(x)$, 则反函数 $y=g(x)$ 也是连续函数. 理由: 函数与其反函数关于直线 $y=x$ 对称.

例 7.5. $y=\sin x$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arcsin y$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

$y=\cos x$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且单调减, 故有反函数 $x=\arccos y$ 在 $[-1,1]$ 上连续且单调减.

$y=\tan x$ 在 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\arctan y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增.

注记. 六个反三角函数都是有界变量

例 7.6. e^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续且单调增, 故有反函数 $x=\ln y$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且单调增.

定理 7.7. 连续函数的符合函数仍是连续函数.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算, 有限次符合运算的函数统称为初等函数.

定理 7.8. 一切初等函数, 包括一切基本初等函数, 在其定义域内均连续.*(注: 初等函数的的定义域中若存在孤立点 x_0, 则 $f(x)$ 在 x_0 处仍是连续的.)*

7.2 无穷小量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \to 0, \beta \to 0$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x} = 0 \Rightarrow \tan^2 x = o(x)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等阶无穷小, 记为 $\alpha(x) = O(\beta(x))$; 例如 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x = O(x)$.

(3) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷小, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$; 例如 $\sin x \sim x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \tan x (x \to 0); 1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, a^x - 1 \sim \ln a \cdot x, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha \cdot x (x \to 0)$.

(4) 当 $x \to x_0$ 时, 若 $\exists k \in R^+$, 使得 $\alpha(x) = O((x - x_0)^k)$, 则称 $\alpha(x)$ 是 $(x - x_0)$ 的 k 阶无穷小

例 7.9. 当 $x \to 0$ 时, 证明: 无穷小量 $\tan x - \sin x$ 是 x 的三阶无穷小.

7.3 无穷大量的比较

设 $x \to x_0$ 时,$\alpha(x) \to \infty, \beta \to \infty$ 且 $(\beta(x) = 0)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷大, 记为 $\alpha(x) = o(\beta(x))$; 如当 $n \to \infty$ 时, $n! = o(n^n); e^n = o(n!); n^2 = o(n!)$.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, 则称 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的等阶无穷大, 特别地当 $A = 1$ 时, 称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的等价无穷大, 记为 $\alpha(x) \sim \beta(x)$; 如当 $n \to \infty$ 时, $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \sim \ln n; n \sim e\sqrt[n]{n}$.

熟练掌握个别关系式:$(\forall a > 1, \alpha > 0, m > 0)$

$$n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha >> (\ln n)^m;$$

$$x^x >> a^x >> x^\alpha >> (\ln x)^m;$$

7.4 等价代换

在积与商的极限中, 无穷小 (大) 因子可用等价无穷小 (大) 代换, 而不影响原来的极限值.

设 $x \to x_0$ 时, $\alpha(x) \sim \alpha_1(x), \beta(x) \sim \beta_1(x)$, 则

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)} \cdot \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} \cdot \frac{\beta_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

作业. ex1.3:16;17;18.

第 8 讲 再论函数连续性及无穷小 (大) 的比较

8.1 函数极限的" 四性"

(1) 唯一性.$f(x)$ 在 x_0 处有极限, 则极限值唯一.

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A_2$. 若 $A_1 > A_2$, 则 $\epsilon = \dfrac{A_1 - A_2}{2} > 0$, 则 $\exists\delta_1 > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - A_1| < \epsilon$; 又 $\exists\delta_2 > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-A_2| < \epsilon$. 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则 $\forall x, 0 < |x-x_0| < \delta \Rightarrow |A_1-A_2| < \epsilon$, 矛盾.

(2) 局部有界性.

从 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in \overline{U}(x_0, \delta) = (x_0 - \delta) \cup (x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)| < |A| + \varepsilon, \forall x \in \overline{U}(x_0, \delta)$.

(3) 保号性.

若 $f(x) \geq 0, \forall x \in \overline{U}(x_0, \delta)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq 0$.

(4) 保序性.

若 $f(x) \geq g(x)$, 则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

8.2 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的四个充要条件

1. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$;

2. $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$,i.e. $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续;

3. $f(x) = f(x_0) + \alpha(x), \alpha(x) \to 0(x \to x_0)$;

4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$, 其中 $\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

8.3 几个常用的记号

$\delta > 0$ 为常数, 设 $\alpha(x) \to 0(\infty), \beta(x) \to 0(\infty), x \to x_0$.

1. 点 x_0 的 δ 邻域:$U(x_0, \delta) = \{x|0 < |x - x_0| < \delta\}$;

2. 点 x_0 的去心 δ 邻域:$U^*(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}\backslash\{x_0\}$;

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, 则记为 $\alpha(x)=o(\beta(x))$; 表示 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的高阶无穷小, 或者说 $\beta(x)$ 是 $\alpha(x)$ 的高阶无穷大;

4. 若 $\exists M>0, s.t.|\alpha(x)|\le M|\beta(x)|, \forall x\in U^*(x_0,\delta)$, 则记为 $\alpha(x)=O(\beta(x))$;

   注记. 助教注: 这里的比如 $o(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{x}=0\}$, 而 $O(x)$ 表示的是函数集合 $\{f|\exists M>0,\exists\delta>0,\forall x\in U^*(x_0,\delta)\Rightarrow|f(x)|\le M|x|\}$. 也就是说,$x^2=o(x), x\to 0$ 表示的实际是 $x^2\in o(x)$.

例 8.1. *若* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\ne 0$, *则* $\alpha(x)=O(\beta(x)), x\in U^*(x_0,\delta)$. *此时称* $\alpha(x)$ *与* $\beta(x)$ *为同阶无穷小 (大), 且* $\alpha(x)\sim A\beta(x), x\to x_0$.

例 8.2. *设* $a_n=\ln n, b_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}, c_n=n, d_n=\sqrt[n]{n!}$, *则* $n\to\infty$ *时*,$a_n,b_n,c_n,d_n\to\infty$, *且* $a_n=o(b_n), b_n=o(c_n), c_n=o(d_n)$.

例 8.3. *当* $x\to x_0$ *时候, 证明:*

1. $o(\alpha(x))\cdot o(\beta(x))=o(\alpha(x)\cdot\beta(x))$;

2. $O(\alpha(x))\cdot O(\beta(x))=O(\alpha(x)\cdot\beta(x))$;

3. $O(o(\alpha(x)))=o(\alpha(x))$;

4. $o(O(\alpha(x)))=o(\alpha(x))$.

注记. 助教注: 这里的 $o(\alpha(x))o(\beta(x))$ 表示的是集合相乘, 即 $o(\alpha(x))o(\beta(x))=\{fg|f\in o(\alpha(x)), g\in o(\beta(x))\}$.

8.4 间断点

$f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上每一点都连续, 即 $f(x)$ 在 (a,b) 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a), f(b-0)=f(b)$.

(x) 在 $[a,+\infty)$ 上连续是指 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 的每一点都连续, 且 $f(a+0)=f(a)$.

若 $f(x)$ 在 x_0 处间断, 则

1. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点;

2. $f(x_0-0), f(x_0+0)$ 均存在且不相等 $\Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点;

3. $f(x_0-0)=\infty, f(x_0+0)=\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点;

4. $f(x_0-0)=-\infty, f(x_0+0)$ 至少有一个不存在, 且 $f(x_0-0)\neq\infty, f(x_0+0)\neq\infty \Leftrightarrow x_0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点中的其它间断点.

8.5 几个特别地非初等函数的连续性

1. (1) 狄利克雷 (Dirichlet) 函数:$D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q;\\ 0, & x\in R-Q.\end{cases}$

   则 (1°) 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界, 且是周期函数, 任意一个正有理数都是 $D(x)$ 的周期, 从而 $D(x)$ 不存在最小正周期;

   (2°) $D(x)$ 在任意一点都不连续, 即 $D(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处间断;

   (3°) $g(x)=xD(x), x\in R$, 则 $g(x)$ 仅在 $x=0$ 处连续.

2. Riemann 函数:$R(x)=\begin{cases}1, & x=0;\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(p,q\in Z, q\neq 0,(p,q)=1);\\ 0, & x\in R-Q.\end{cases}$

   则 (1°) $R(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义, 有界且周期为 1;

   (2°) $R(x)$ 在任意一点 x_0 处极限为 0,i.e. $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0, \forall x_0\in R$;

   (3°) $R(x)$ 在任一无理点处都连续, 在有理点处都为可去间断点.

3. $\xi(x)\triangleq\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}, x\in(1,+\infty)$,

   $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处连续, 处处可微. 且 $\xi(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$,i.e. $\xi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上处处具有任意阶连续的导函数.

4. $\Gamma(x)\triangleq\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt, x>0$,

   $\Gamma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 处处可微, 且 $\Gamma(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

作业. ex2.1:4,5,6(2)(4)(5),7,8,17(1)(3)(4).

第 9 讲 闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的五大性质

9.1 一致连续性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $\forall x_0 \in I$, 有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta(\epsilon, x_0) > 0, \forall|x - x_0| < \delta|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 恒成立.

若对 $\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in I, |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 则称 $f(x)$ 在 I 上一致连续.

由此可见, 一直连续是比连续条件更强的连续. 凡在 I 上一致连续的函数, 必在 I 上连续, 但反之不然.

例 9.1. *证明 $f(x) = \sin x$ 在 R 中一致连续.*

例 9.2. *证明 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上连续但不一致连续.*

9.2 五大特性

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有如下五大性质:

性质 1 零值性: 若 $f(a)f(b) < 0$, 则 $\exists x_0 \in (a,b), s.t. f(x_0) = 0$. 称 x_0 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的零点.

性质 2 介值性: 若存在常数 h, 使 $f(a) < h < f(b)$, 则 $\exists x_0 \in (a,b), s.t. f(x_0) = h$.

性质 3 有界性:$\exists M > 0, s.t. |f(x)| \leq M, \forall x \in [a,b]$.

性质 4 最值性: 必 $\exists x_1, x_2 \in [a,b], s.t. f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a,b]$. 称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值和最小值.

性质 5 一致连续性: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续.

例 9.3. *证明方程 $x^7 + \epsilon^x = 3$ 在 $(0,1)$ 内存在唯一实根.*

例 9.4. *设 $f(x) \in C[a,b]$, 且 $f([a,b]) = [a,b]$, 则 $\exists x_0 \in [a,b], s.t. f(x_0) = x_0$.*

作业. ex2.2:1,2,3,5,6,7,8,9;CH2:6.

第 10 讲　函数极限连续性习题课

10.1　熟练掌握以下 6 个等价无穷小

设 $u \to 0$,

1. $\sin u \sim u$;
2. $1 - \cos u \sim \frac{u^2}{2}$;
3. $e^u - 1 \sim u$;
4. $a^u - 1 \sim \ln a \cdot u$;
5. $\ln(1+u) \sim u$;
6. $(1+ku)^\alpha - 1 \sim \alpha k u$.

其中 $a > 0, a \neq 1, k, \alpha$ 为常数, 且 $k\alpha \neq 0$.

10.2　掌握以下一批等价无穷小

设 $u \to 0, \forall m > 0$,

1. $\sin^m u \sim u^m$;
2. $(1 - \cos u)^m \sim (\frac{1}{2}u^2)^m$;
3. $(e^u - 1)^m \sim u^m$;
4. $(a^u - 1)^m \sim (\ln a \cdot u)^m$;
5. $(\ln(1+u))^m \sim u^m$;
6. $(\tan u)^m \sim u^m$;
7. $(\arcsin u)^m \sim u^m$;
8. $(\arctan u)^m \sim u^m$;
9. $(\tan u - \sin u) \sim \frac{1}{2}u^3$.

10.3 熟练掌握以下等价无穷大

$n \in N^*, x \in R^+, \forall a > 1, \alpha > 0, m > 0,$

1. $n^n >> n! >> a^n >> n^\alpha >> (\ln n)^m$;($n$ 充分大)

2. $x^x >> a^x >> x^\alpha >> (\ln x)^m$;($x$ 充分大)

10.4 熟练掌握以下两个等价无穷大

n 充分大时,

1. $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \sim \ln n$;

2. $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{1}{e} n$.

作业. ex2.2:7,8,9,13;CH2:1,2,3,5.

第 11 讲 函数的导数与 18 个求导基本公式

11.1 导数的定义

设函数 $y = f(x)$ 在 $\overline{U}(x_0, \delta)$ 上有定义, $x + \Delta x \in \overline{U}(x_0, \delta)$. 若

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = a \in R.$$

则称常数 a 为函数 $y = f(x)$ 在 x_0 处的导数 (derivative), 记为 $f'(x_0) = a$, 即 $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. 并称 $f(x)$ 在 x_0 处可导.

此时, 有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x), \alpha(x) \to 0 (x \to x_0) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \to 0 (\Delta x \to 0)$. 即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, 即 $f(x)$ 在 x_0 处连续.

这即" 可导必连续", 但" 连续不一定可导".

例 11.1. *设 $f(x) = |x|$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导.*

记:$f'_-(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, f'_+(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. 分别称 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$ 为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数和右导数.

定理 11.2. *$f'(x_0)$ 存在 $\Leftrightarrow f'_-(x_0), f'_+(x_0)$ 均存在且相等.*

若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点 x 处都可导, 则称 $f(x)$ 在 I 上可导, 并称 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 为 $f(x)$ 的导函数.

例 11.3. *设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 求曲线 $y=f(x)$ 上点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程.*

切线方程:$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$;

法线方程:$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.(设 $f'(x_0)\neq 0$)

从例 11.3知, 导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是过切点 $M(x_0,y_0)$ 的切线的斜率.

例 11.4. *设质点的运动方程为 $s=f(t)$, 则质点在 t_0 时刻的速度 $v=f'(t_0)$. 这也是导数的物理意义.*

从纯数学的角度来说,$f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是因变量的增量相对于自变量而言的相对变化率. 例如, 若 $f'(x_0)=5$, 则可认为自变量 x 在 x_0 处有 1% 的变化时, 则因变量 y 在 x_0 处有 5% 的变化. 余类推.

11.2 18 个求导基本公式

设 C,a,α 为常数,$a>0,a\neq 1$.

(1). $(C)'=0$;

(2). $(a^x)'=a^x\ln a$;

(3). $(e^x)'=e^x$;

(4). $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$;

(5). $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;

(6). $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

(7). $(\sin x)'=\cos x$;

(8). $(\cos x)'=-\sin x$;

(9). $(\tan x)'=\sec^2 x$;

(10). $(\cot x)'=-\csc^2 x$;

(11). $(\sec x)'=\sec x\tan x$;

(12). $(\csc x)'=-\csc x\cot x$;

(13). $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $|x|<1$;

(14). $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,$|x|<1$;

(15). $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$,$x\in R$;

(16). $(\mathrm{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$,$x\in R$;

(17). $(\sinh x)'=\cosh x$;

(18). $(\cosh x)'=\sinh x$.

称 $\sinh x,\cosh x$ 为双曲正弦与双曲余弦.

11.3 三大求导法则

求导的四则运算法则, 反函数的求导法则及复合函数求导法则称为" 求导三大法则". 可以证明, 在" 三大求导法则" 下, 上述 18 个基本公式可以化简为 1 个求导公式:$(e^x)' = e^x$.

作业. ex3.1:1(1),2(2),4,7(6)(8)(13),11(1),14(2)(4),15,16.