数分B1 第10次习题课

2024.12.15

一 分离变量型

1.（Ex 6.1.1(1)）　$(1+x^2)dy = y\,dx$

① $y=0$ ✓　　（注意这种特解！）

② $y\neq 0 \Rightarrow \frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2}$　两边积分 $\Rightarrow \ln|y| = \arctan x + C$

$\Rightarrow |y| = e^C e^{\arctan x} = C' e^{\arctan x}$　$(C'>0)$

$\Rightarrow y = Ce^{\arctan x}$　$(C\neq 0)$

综合①②有 $y=Ce^{\arctan x}$　$(C\in\mathbb{R})$

变式："齐次方程"　　方法：$\frac{y}{x}=u \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

2（Ex 6.1.2(2)）　$y' = \frac{y}{x}+\frac{x}{y}$

$\Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = u+\frac{1}{u}$

$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$　　$u\,du = \frac{dx}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}u^2 + C = \ln|x|$

$\Rightarrow y^2 = 2x^2\ln|x| + Cx^2 = x^2(2\ln|x|+C)$

故 $y = \pm|x|\sqrt{2\ln|x|+C}$

3（Ex 6.1.3）微调成齐次方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+3}{x-y+1}$$

$\Downarrow$

$u=x+a$　$v=y+b$　$\frac{dv}{du} = \frac{u-a+v-b+3}{u-a-v+b+1}$　$\Rightarrow \begin{cases} 3=a+b \\ 1=a-b \end{cases}$　$a=2$　$b=1$

$\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}$

令 $v=ku \Rightarrow k+u\frac{dk}{du}=\frac{k+1}{1-k} \Rightarrow u\frac{dk}{du}=\frac{1+k^2}{1-k}$

$\Rightarrow \frac{du}{u}=\frac{1-k}{1+k^2}\,dk$

$\Rightarrow \ln|u| = \arctan k-\frac{1}{2}\ln(1+k^2)+C$

二、一阶线性方程

公式1. $y'+P(x)y=Q(x) \Rightarrow y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)\,e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$

无须再加常数

4. (Ex 6.1.4(1)) $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$

$y'-\frac{2x}{1+x^2}y=1+x^2$

$\Rightarrow y=e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left(\int(1+x^2)e^{\int\frac{-2x}{1+x^2}dx}dx+C\right)$

$=(1+x^2)(x+C)$

变式: Bernoulli 方程　　调整y的次数

5. (Ex6.1.4(4)) $y-y'\cos x=y^2(1-\sin x)\cos x$

① $y=0$ 为一个解

② $y\neq 0 \Rightarrow -\frac{y'}{y^2}+\frac{1}{y}\sec x=(1-\sin x)$

$\xRightarrow{u=\frac{1}{y}} u'+u\sec x=(1-\sin x)$

$u=e^{-\int\sec x dx}\left(\int(1-\sin x)\,e^{\int\sec x\,dx}dx+C\right)$

(回忆 $\int \sec x dx = \ln|\sec x+\tan x|+C$)

故 $u = \frac{1}{|\sec x+\tan x|}\left(\int (1-\sin x)|\sec x+\tan x| dx + C\right)$

$= \frac{|\cos x|}{1+\sin x}\left(\int \frac{1-\sin^2 x}{|\cos x|} dx + C\right)$

$= \frac{\operatorname{sgn}(\cos x)\cos x}{1+\sin x}\left(\int \cos x \operatorname{sgn}(\cos x) dx + C\right)$

$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x>0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$

$= \frac{\cos x(\sin x + C)}{1+\sin x} \Rightarrow y = \frac{1+\sin x}{\cos x(C+\sin x)}$

故 $y=0$ 或 $y = \frac{1+\sin x}{\cos x(C+\sin x)}$

三.降阶

(1) 只与 x. y'. y'' 有关 $\Rightarrow$ 令 $p=y'$ 自然降阶

6(Ex 6 1.12(3)) $y''=y'+x$

$p=y'$ $\quad p'=p+x \quad p'-p=x$

$\Rightarrow p = e^x\left(\int x e^{-x} dx + C_1\right)$

$= e^x\left(-(x+1)e^{-x}+C_1\right)$

$= C_1 e^x - x - 1$

$\Rightarrow y = C_1 e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2$

(尝试用特解+基本解组算这题)

(2) 只与 y. y' y'' 有关 $\Rightarrow$ 令 $p=y'$ $\quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx}\frac{dp}{dy} = p\frac{dp}{dy}$

7.(Ex 6.1.12(4)) $\quad y''+(y')^2 = 2e^{-y}$

$\Rightarrow p\frac{dp}{dy} + p^2 = 2e^{-y}$

$\overset{u=p^2}{\Rightarrow} \frac{1}{2}\frac{du}{dy} + u = 2e^{-y} \qquad \frac{du}{dy}+2u = 4e^{-y}$

$\Rightarrow u = e^{-2y}\left(\int 4e^{y} + C\right) = 4e^{-y} + Ce^{-2y}$

$$(y')^2=4e^{-y}+Ce^{-2y}$$

$$\frac{dy}{dx}=\pm e^{-y}\sqrt{4e^y+C}$$

$$\Rightarrow \pm\frac{de^y}{\sqrt{4e^y+C}}=dx \Rightarrow \pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^y+C_1}=x+C_2$$

$$\Rightarrow 4e^y+C_1=(2x+C_2)^2$$

$$=4x^2+4C_2x+C_2^2$$

$$\Rightarrow y=\ln\left(x^2+C_2x+\frac{C_2^2-C_1}{4}\right)$$

三. 二阶线性方程

(1) 齐次 $y''+p(x)y'+q(x)=0$

解的结构: $y=C_1y_1+C_2y_2$ $y_1.y_2$线性无关

公式2 ($y_1\to y_2$) $y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int_{x_0}^{x}p(t)dt}dx$

故只须观察出一个y_1 $\xrightarrow{\text{公式2}} y_2 \xrightarrow{\text{组合}}$ 通解

8. (Ex 6.22(2)) $xy''-(1+x)y'+y=0$

猜特解: 多项式

一次: $y''=0$ $(1+x)y'=y$ $\Rightarrow y=C(x+1)$ 故取 $y_1=x+1$

常数

套公式求y_2. $y_2(x)=(x+1)\int\frac{1}{(x+1)^2}e^{\int_{x_0}^{x}\frac{1+t}{t}dt}dx$

$$\overset{\text{取}\frac{x}{x_0}>0}{=}(x+1)\int\frac{1}{(x+1)^2}e^{\ln\frac{x}{x_0}+x-x_0}dx$$

$$=(x+1)\int\frac{1}{(x+1)^2}\frac{x}{x_0}e^{x-x_0}dx$$

$$=C(x+1)\int\frac{xe^x}{(x+1)^2}dx$$

$$\int \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \int xe^x d(-\frac{1}{x+1})$$

$$= -\frac{x}{x+1}e^x + \int \frac{1}{x+1} d(xe^x) = e^x - \frac{x}{x+1}e^x + C$$

$$= \frac{1}{x+1}e^x + C$$

故 $y_2 = e^x \Rightarrow y = C_1(x+1) + C_2 e^x$

本题另解 $xy'' - (1+x)y' + y = 0 \Rightarrow x(y'-y)' - (y'-y) = 0$

$$\xrightarrow{u=y'-y} xu' = u \rightarrow u = C_1 x$$

$$y' - y = C_1 x \Rightarrow y = e^x\left(\int C_1 x e^{-x} dx + C_2\right)$$

$$= C_1(x+1) + C_2 e^x$$

(2) 非齐次　要素　齐次解 y_1, y_2　特解 y_0

公式3 $(y_1 + y_2 \rightarrow y_0)$

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{W(t)} f(t)dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{y_1(t)y_2(x) - y_2(t)y_1(x)}{y_1(t)y_2'(t) - y_2(t)y_1'(t)} f(t)dt$$

9. Ex 6.2 5(1)　$y'' + y = 2\sin\frac{x}{2}$

易知 $y_1 = \sin x$　$y_2 = \cos x$

套公式

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\sin t\cos x - \sin x\cos t}{-\sin t\sin t - \cos t\cos t} 2\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= 2\int_{x_0}^{x} \sin(x-t)\sin\frac{t}{2}dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \cos(x-\frac{3}{2}t) - \cos(x-\frac{t}{2})dt$$

$$= \frac{2}{3}\sin(x-\frac{3}{2}x_0) - \frac{2}{3}\sin(x-\frac{3}{2}x) + 2\sin(x-\frac{x}{2}) - 2\sin(x-\frac{x_0}{2})$$

取 $x_0 = 0$　$\frac{8}{3}\sin\frac{x}{2} - \frac{4}{3}\sin x$

与y_1, y_2组合 $\Rightarrow y = C_1\sin x + C_2\cos x + \frac{4}{3}\sin\frac{x}{2}$

四 常系数线性 (特征方程)

Thm. 对高阶常系数齐次线性方程 $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$

若方程 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ 的不同根分别为 $\lambda_1 \sim \lambda_m$. 重数为 $n_1 \sim n_m$

且其中 $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$ $(1 \le j \le s)$ 为虚数. $\lambda_{s+1} \sim \lambda_m$ 为实数 则通解为

$$y(x) = \sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{n_k-1} x^j e^{\alpha_k x}(A_{jk}\cos\beta_k x + B_{jk}\sin\beta_k x) + \sum_{k=s+1}^{m}\sum_{j=0}^{n_k-1} C_{jk}x^j e^{\lambda_k x}$$

其中 A_{jk}. B_{jk}. C_{jk} 为任意常数

10 $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 4y^{(3)} - 4y'' + 3y' - y = 0$

特征方程为 $\lambda^5 - 3\lambda^4 + 4\lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$

$$\Rightarrow (\lambda^2+1)(\underbrace{\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1}_{(\lambda-1)^3}) = 0$$

$\Rightarrow$ 根为 $\pm i$, 1 (重数3)

$$\Rightarrow y = C_1\cos x + C_2\sin x + C_3 e^x + C_4 x e^x + C_5 x^2 e^x$$

五 积分方程 $\longrightarrow$ 微分方程

11. (2022 Final, 四) $f(x)$ 连续且 $f(x) = x^2 - \int_0^x (x-t)f(t)dt$ ① 求 $f(x)$

积分方程 $\xrightarrow{\text{求导}}$ 微分方程

$$f'(x) = 2x + xf(x) - \int_0^x f(t)dt - xf(x) \quad ②$$

$$f''(x) = 2 - f(x)$$

积分方程均暗含初值！ ① $\overset{x=0}{\Rightarrow} f(0)=0$

② $\overset{x=0}{\Rightarrow} f'(0)=0$

方程：$f''(x)+f(x)=2 \Rightarrow f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+2$

考虑初值解 C_1, C_2 $\Rightarrow f(x)=2-2\cos x$

六、其它

12. 若 $y(x)$ 满足 $y''-2xy'-e^{x}y=0$ 且 y 不恒为0 则 $e^{-x^2}yy'$ 严格单增

设 $h(x)=e^{-x^2}y(x)y'(x)$ 原方程两边同乘 $e^{-x^2}y(x)$

$\Rightarrow e^{-x^2}y(x)y''(x)-2xe^{-x^2}y'(x)y(x)-e^{x-x^2}y^2(x)=0$

$h'(x)=-2xe^{-x^2}y(x)y'(x)+e^{-x^2}(y'(x))^2+e^{-x^2}y(x)y''(x)$

$=e^{x-x^2}y^2(x)+e^{-x^2}(y'(x))^2\geq 0$

若 $\exists x_0$ $h'(x_0)=0 \Rightarrow y(x_0)=y'(x_0)=0$ 由解的初值唯一性 $y\equiv 0$ 矛盾！

故 $h'(x)>0\ (\forall x)$ 故 $h(x)$ 严格单增

13 $y^3dx+2x(x-y^2)dy=0$

先将 y 降次 $y^4dx+2x(x-y^2)ydy=0$

$\overset{u=y^2}{\Rightarrow} u^2dx+x(x-u)du=0$ $\quad \dfrac{du}{dx}=\dfrac{u^2}{x(u-x)}$

$\overset{u=vx}{\Rightarrow} v+x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v^2}{v-1}$ $\quad x\dfrac{dv}{dx}=\dfrac{v}{v-1}$

$\Rightarrow \dfrac{(v-1)dv}{v}=\dfrac{dx}{x}$ $\quad \ln|x|=v-\ln|v|+C$

$xv=Ce^{v}$

$\Rightarrow y^2=Ce^{\frac{y^2}{x}}$

14. $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 证明 若 $y'(x)+4y(x)=f(x)$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$

先解方程. $y(x)=e^{-4x}\left(\int_0^x e^{4t}f(t)\,dt+C\right)$.

故只须证 $e^{-4x}\int_0^x e^{4t}f(t)\,dt \to 0$

(直观.

则对 $t\in[l,x]$ $f(t)<\varepsilon$

$\Rightarrow e^{-4x}\int_l^x e^{4t}f(t)\,dt \sim \frac{\varepsilon}{4}(1-\overset{0\uparrow}{e^{4l-4x}})$

对 $t\le l$ $e^{4t}f(t)\le e^{4l}M$

$\Rightarrow e^{-4x}\int_0^l e^{4t}f(t)\,dt \sim l\,\underset{\downarrow 0}{e^{4l-4x}}M$)

严谨论证: $\forall\varepsilon>0$ $\exists M$ s.t. $\forall x>M$ $|f(x)|<\varepsilon$

$\exists M'$ s.t. $\forall x\geq 0$ $|f(x)|\le M'$

故 $\left|e^{-4x}\int_0^x e^{4t}f(t)\,dt\right|$

$\le \left|e^{-4x}\int_0^M M'e^{4t}\,dt\right| + \left|e^{-4x}\int_M^x e^{4t}\varepsilon\,dt\right|$

$\le MM'e^{4M-4x} + e^{-4x}\varepsilon\,\frac{1}{4}e^{4(x-M)}$

$= MM'e^{4M}e^{-4x} + \frac{\varepsilon}{4}\underbrace{e^{-4M}}_{\le 1} \to 0$

另法: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{4x}y(x)}{e^{4x}}$

$\overset{洛}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y'(x)e^{4x}+4e^{4x}y(x)}{4e^{4x}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{4}=0$