极限及连续复习课

主要内容

一、数列极限

1.理解数列极限的$\varepsilon - n_0$定义:会用定义求证数列极限。基本方法是1° 解不等式$|a_n - a| < \varepsilon$求n_0, **2**$^\circ$ 先对$|a_n - a|$进行放大再求n_0.

2.掌握数列极限的性质:有界性，保号性，不等式性，数列极限与子列极限之间的关系.

3.掌握求数列极限的方法:利用定义，夹逼准则，四则运算，利用单调有界原理判定极限存在，再利用递推公式两边取极限，数列极限与函数极限之间的关系，重要极限。

4.牢记一些重要结论:

1° 若数列a_n满足$\lim a_{2k+1} = \lim a_{2k} = a$,则$\lim a_n = a$

2° 若$\lim a_n = a$,则$\lim |a_n| = |a|$,反之不真,但若$\lim |a_n| = 0$,则$\lim a_n = 0$.

3° 1. O.Stolz[1] 公式

(1) 设 $\lim a_n = \lim b_n = 0$, 且 $\{b_n\}$ 严格减, 若 $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = a$ (有限或定号无穷大), 则 $\lim \frac{a_n}{b_n} = a$.

(2) 设 $\{b_n\}$ 严格增, 且 $\lim b_n = +\infty$, 若 $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = a$(有限或定号无穷大). 则 $\lim \frac{a_n}{b_n} = a$.

4° 设$\lim a_n = a$或$+\infty, -\infty$,则:$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$或$+\infty, -\infty$.

5° $\lim \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} = a$, 其中 $a_n > 0$.

6° 设$a_n > 0$, $\lim a_n = a$,则:$\lim \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = a$.

7° 设$a_n > 0$, $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$,则:$\lim \sqrt[n]{a_n} = a$.

8° $\lim \sqrt[n]{a} = 1$, $\lim \sqrt[n]{n} = 1$, $\lim (1 + \frac{1}{n})^n = e$

5.例子

例1 设$f(x)$在$(0, +\infty)$上连续,且对任何自然数n,$f(x)$在$[n, n+1]$上严格单调,若$f(n)f(n+1) < 0$,

(1)证明: 存在唯一的$\xi_n \in (n, n+1)$,使得$f(\xi_n) = 0$. (2)求极限$\lim\limits_{n \to \infty} n \sin \dfrac{2\pi}{\xi_n}$.

证明 (1) 因为$f(x)$在$[n, n+1]$上连续,且严格单调,又$f(n)f(n+1) < 0$,由零值定理知,存在唯一的$\xi_n \in (n, n+1)$,使$f(\xi_n) = 0$.

---

[1]O.Stolz (1842-1905) 奥地利数学家.

解 (2) 因为$n<\xi_n<n+1$,得$\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{\xi_n}<\dfrac{1}{n}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\xi_n}=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\xi_n}=1$.

$\sin\dfrac{2\pi}{\xi_n}\sim\dfrac{2\pi}{\xi_n}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{2\pi}{\xi_n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\dfrac{2\pi}{\xi_n}=2\pi$.

例2 设$0<x_n<3, x_{n+1}=\sqrt{(3-x_n)x_n}$,证明$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

解 $x_{n+1}=\sqrt{(3-x_n)x_n}\leq\dfrac{3-x_n+x_n}{2}=\dfrac{3}{2}$,

$$\begin{aligned}x_{n+1}-x_n&=\sqrt{(3-x_n)x_n}-(\sqrt{x_n})^2\\&=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})=\frac{\sqrt{x_n}(3-2x_n)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0\end{aligned}$$

所以可得数列$\{x_n\}$是递增的,由单调有界原理可知$\{x_n\}$是收敛的,设$\lim x_n=a$,在$x_{n+1}=\sqrt{(3-x_n)x_n}$的两边取极限,得$a^2=(3-a)a\Longrightarrow a=\dfrac{3}{2}$.

例3 设$x_1=a, y_1=b, 0<a<b$ $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 证明$\{x_n\}$与$\{y_n\}$有相同得极限.(没有时间不讲)

证

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\leq\frac{x_n+y_n}{2}=y_{n+1}$$

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}\geq\sqrt{x_nx_n}=x_n\quad\therefore\quad\{x_n\}\uparrow$$

$$y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2}\leq\frac{y_n+y_n}{2}=y_n\quad\therefore\quad\{y_n\}\downarrow$$

$$x_1\leq x_n\leq y_n\leq y_1\therefore\{x_n\}\text{有上界}b, \{y_n\}\text{有下界}a$$

由单调有界原则$\{x_n\},\{y_n\}$得极限存在。设$\lim x_n=x, \lim y_n=y$ 在递推公式两边取极限得

$$\begin{cases}x=\sqrt{xy}\\ y=\dfrac{x+y}{2}\end{cases}\Rightarrow x=y$$

二、函数极限

1.理解函数极限的定义: $\varepsilon-\delta$定义，$\varepsilon-X$定义，方法还是解不等式或放大再解不等式求δ或X。

2.掌握函数极限的性质: 局部有界性，不等式性，保号性，函数极限与数列极限之间的关系，

3.掌握无穷小量与无穷大量: 定义，无穷小量与无穷大量关系，无穷小（大）量级的比较，常用等价无穷小量，函数与无穷小量之间的关系，$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=l\iff f(x)=l+\alpha(x)$其中$\lim\limits_{x\to\square}\alpha(x)=0$

4.$f(x)$与$|f(x)|$极限之间关系:

$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=l\Longrightarrow\lim\limits_{x\to\square}|f(x)|=|l|$,但反之不真.但若有$\lim\limits_{x\to\square}|f(x)|=0$,则$\lim\limits_{x\to\square}f(x)=0$.

5.求极限的方法:

1° 连续函数的极限值等于函数值。

2° 四则运算（通分、分解因式，分子分母有理化）; 复合函数的极限运算（变量代换）。

3° 等价无穷小（大）量的代换。$x \to 0$ $\sin x \sim \tan x \sim \arctan x \sim \arcsin x \sim x; \ln(1+x) \sim x; e^x - 1 \sim x, a^x \sim x\ln a,\ \tan x - \sin x \sim \dfrac{1}{2}x^3,\ (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$

4° 重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

5° 利用左、右极限求极限。

6° 利用夹逼定理求极限。

7° 以后将陆续介绍利用“罗必塔法则、Taylor公式、中值定理、定积分、级数”等求极限。

6.例子

例1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2} \quad (\dfrac{0}{0}型)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-x-1-x}{(x+2)(x-1)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-2}{2\sqrt{2}(x+2)} = -\dfrac{\sqrt{2}}{6}.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})} \quad (\dfrac{0}{0}型)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2(1+\sqrt{\cos x})} = \lim\limits_{x\to x^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2\cdot 2} = \dfrac{1}{2}.$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\tan\frac{\pi}{2}x} \quad (1^\infty)$

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}(1+1-x)^{\dfrac{1}{1-x}\cdot\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}\cdot(1-x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\cos\frac{\pi}{2}x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{|x|}).$

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{x}) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1} + \dfrac{\sin x}{x}) = 0+1 = 1.$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \dfrac{\sin x}{-x}) = 2+(-1) = 1.$

所以,原式=1.

例5 若 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{1-x} = 5$,求$a, b$.

解 $x^2+ax+b = (1-x)(-x+m)$,由已知可得$-x+m = 5 \quad (x=1), m = 6$,于是有$x^2+ax+b = (1-x)(-x+6) = x^2-7x+6$,可得$a=-7, b=6$.

例6 已知$f(x) = \dfrac{px^2-2}{x^2+1} + 3qx + 5$,当$x\to\infty$时,$p, q$取何值时$f(x)$为无穷小量;$p, q$为何值时$f(x)$为无穷大量.

解 $f(x) = \dfrac{px^2-2+3qx^3+3qx+5x^2+5}{x^2+1} = \dfrac{3qx^3+(5+p)x^2+3qx+3}{x^2+1},$

当$x\to\infty,\ q=0,\ p=-5$时,$f(x) = o(1)$;

当$x\to\infty,\ q\neq 0,\ p\in\mathbf{R}$,$f(x)$为无穷大量.

例7 已知$(2x)^x - 2 \sim a(x-1)+b(x-1)^2,\ (x\to 1)$,求$a, b$的值.

解 当$x \to 1$时,$a(x-1)+b(x-1)^2 \sim a(x-1)$,所以$b$可为一切值.

$(2x)^x-2=e^{x\ln 2x}-e^{\ln 2}=e^{\ln 2}(e^{x\ln 2x-\ln 2}-1)\sim 2(x\ln 2x-\ln 2)=2[(x-1)\ln 2+x\ln x]$,

因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x}{x-1}=\dfrac{x\ln(x-1+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x-1}=1$,

所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln 2x-\ln 2}{x-1}=\ln 2+1$,

可得$(2x)^x-2\sim 2(\ln 2+1)(x-1)\sim a(x-1)$,故$a=2(\ln 2+1)$.

例8 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{e^x-1}=5$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解 由已知得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\sin 2x}=0$,及$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{f(x)}{\sin 2x}}{x}=5$.

所以,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=10$.

例9 设$f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-1}{x}-\dfrac{\sin x}{x^2}\right)=2$,求$f(0)$.

解 由已知得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(f(x)-1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=2$,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

所以,$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-1-\dfrac{\sin x}{x}\right)=0$,可得$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=2$.

例10 已知$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{4}{\sin x}-\dfrac{\ln(1+3x)}{x^2}\right)=A$, 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 由已知得$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(f(x)+\dfrac{4x}{\sin x}-\dfrac{x\ln(1+3x)}{x^2}\right)=A$,因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$,

可得$\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+\dfrac{4x}{\sin x}-\dfrac{x\ln(1+3x)}{x^2}\right)=0$,

所以,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\lim\limits_{x\to}\left(\dfrac{4x}{\sin x}-\dfrac{x\ln(1+3x)}{x^2}\right)=-4+3=-1$.

三、连续

1.掌握连续的定义： 能对函数进行连续性的讨论，间断点能指出类型。

2.函数$f(x)$与$|f(x)|$在x_0点连续之间的关系:若函数$f(x)$在x_0点连续,则$|f(x)|$在x_0点也连续,反之不真.

3. 掌握闭区间上连续函数的性质： 零值定理，介值定理，最大（小）值定理。

4.理解一致连续概念： 一致连续定义，一致连续判定。

5.例子

例1 若$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0,\\ a & x=0.\end{cases}$为连续函数,求$a$的值.

解$f(x)$在$x\neq 0$处点点连续,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{2ax}-1}{x}=2+2a,$$

由连续定义$2+2a=a$,得$a=-2$.

所以,当$a=-2$时函数$f(x)$点点连续.

例2 若$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则$f(x)$在$[a,+\infty)$上或有最大值或有最小值.

证 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$,若$\exists x_0\in[a,+\infty)$使$f(x_0)>l$,

取$\varepsilon=f(x_0)-l$, $\exists X>x_0$,当$x>X$有,

$$f(x)<l+\varepsilon=l+f(x_0)-l=f(x_0).$$

$f(x)$在$[a,X]$上连续,故有最大值M, $\forall x\in[a,X]$有$f(x)\le M$.

也即有$\forall x\in[a,+\infty]$有$f(x)<f(x_0)\le M$.

所以,M就是$f(x)$在$[a,+\infty)$上的最大值.

从证明的过程可以看出,若取到$f(x_0)>l$,就有最大值;若能取到$f(x_0)<l$,就有最小值.

历年试卷

1. 求极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}}$. (20)
2. 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2xe^{\frac{1}{x}}+\cos x}{x}$. (20)
3. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. (20)
4. 设
$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=a_n(2-a_n),\quad n=0,1,2,\cdots.$$
试证：数列$\{a_n\}$收敛，并计算$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$. (20)
5. 设$a<b<c$, $f(x)$ 分别在$(a,b]$ 和$[b,c)$ 上一致连续, 证明$f(x)$ 在(a,c) 上一致连续. (20)
6. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}\right]$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数. (19)
7. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\pi\sqrt{n^2+2019})$. (19)
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中$a,b,c>0$. (19)
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x-x\cos x}$. (19)
10. (14 分) 实数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$b_n>0$. $c_n=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 证明：
   1. 数列$\{c_n\}$收敛.
   2. 若$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$. (19)
11. (10 分)数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=f(a_n)$, $a_n\neq0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, $f(x)=x+\alpha\cdot x^k+o\left(x^k\right)\quad(x\to0)$, 其中整数$k>1,\alpha\neq0$为常数. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n^{k-1}=\dfrac{1}{(1-k)\alpha}$. (19)

12. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$. (18)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$. (18)

14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{x\sin x}-\cos x}{x^2}$. (18)

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt[x]{a}}{3}+\frac{2\sqrt[x]{b}}{3})^x$, 其中$a$, b 为正实数 (18)

16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^{2018}x-x^{2018}}{x^{2020}}$ (18)

17. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ (17)

18. 已知$a_n=n\sin(2\pi n!e)$ 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (17)

19. 设函数f在点a可导,且$f(a)\neq0$ 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right|^n$,其中$n$为自然数.(17)

20. 求$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.(17)

21. 设$f(x)$有二阶导数连续,且$f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=6$,试求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin^2x)}{x^4}$.(17)

22. 设$\{a_n\}$是一个数列,λ为常数.

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lambda$,其中$\lambda$为常数.试证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lambda$.

(2)若p是大于1的正整数且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$.试证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{\lambda}{p}$. (17)

23. 求极限$\lim\limits_{x\to0}(\mathrm{e}^x-x)^{\frac{1}{x\tan(x)}}$ (16)

24. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{3}{x^3-1}-\frac{5}{x^5-1}\right)$.(16)

25. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos(2x)-\mathrm{e}^{2x}+2\sin(x)}{x+\ln(1-x)}$. (16)

26. 若有界数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n+b_n)=0$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+b_n\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right).$$

(16)

27. 假设$x_1=\frac{1}{9}$, $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)$. 证明: 数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的奇、偶子列都是严格单调的有界数列, 并且它们都收敛到同一有限值.(16)

28. 设$f(x)$ 为定义在$\mathbb{R}$ 上的周期函数, 在$x=0$ 附近有界, 满足$\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)-f(2x)]=0$. 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. (16)

29. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\ln(1-x)}$ (15)

30. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$ (15)

31. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n\right]$ (15)

32. 设$f(x)$在$x=0$有二阶导数，$f(0)=1,f'(0)=0$,求$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^x$.(15)

33. 设$0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 证明数列$\{x_n\}$ 的极限存在并求此极限.(15)

34. 函数$f(x)$在$x=0$的某邻域中有三阶连续导数，$f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=-1$,设$a_{n+1}=f(a_n)$满足$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0,(a_n\neq 0,\ n=1,2,\cdots)$, 求$\lim\limits_{n\to+\infty}na_n^2$.(15)

35. 设数列$\{x_n\}$ 与$\{y_n\}$ 满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$, 则下列断言正确的是

(A)若$\{x_n\}$发散, 则$\{y_n\}$ 必发散.　(B) 若$\{x_n\}$ 无界, 则$\{y_n\}$必有界.

(C)若$\{x_n\}$ 有界, 则$\{y_n\}$ 必为无穷小.　(D) 若$\{\dfrac{1}{x_n}\}$无穷小, 则$\{y_n\}$ 必为无穷小. (15)

36. 设当$x\to 0$时, $e^{\sin x}-(ax^2+bx+1)$是比x^2 高阶的无穷小,则

(A)$a=\dfrac{1}{2},b=1$.　(B)$a=1,b=1$.　(C)$a=-\dfrac{1}{2},b=1$.　(D)$a=-1,b=1$. (15)

37. 函数$f(x)=x\cos x$,则(　)

(A) 当$x\to\infty$时为无穷大量　　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界　　(D) 当$x\to\infty$时有有限极限.

38. 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\sin x}{n\sin^2 x+1}$,则$f(x)$的间断点为____________.

39. 若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)-(ax+bx^2)}{x^2}=3$,则$a=$________,$b=$________.

40. 求极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-1)(\sqrt{1-\tan x}-1)}{x\ln(1-2x)}$,　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\cos\frac{1}{x})^{x^2}$.

41. 设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x} & x<0,\\ 6 & x=0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{x\sin\frac{x}{4}} & x>0.\end{cases}$ 问a为何值时,$f(x)$在$x=0$处连续,a为何值时,$x=0$是$f(x)$的可去间断点.

42. $x\to 0$时,$e^x-ax^3-bx^2-cx-d$是与x^3等价无穷小量,则$(a,b,c,d)=($　$)$

(A) $(1,\frac{1}{2},1,1)$　　(B) $(-\frac{5}{6},\frac{1}{2},1,1)$　　(C) $(\frac{1}{6},1,1,1)$,　　(D) $(\frac{1}{6},\frac{1}{2},1,1)$

43. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}\sin\dfrac{1}{n}$.

44. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right]$.

45. 设$g(x)$在$x\le 0$上连续,讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\le 0.\end{cases}$的连续性及可微性.

46. 数列$\{\sqrt[n]{n}\}, n=1,2,\cdots$的下确界是____________.

47. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{\ln^3(1+x)}$.

48. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=3, a_{n+1}=\dfrac{1}{1+a_n}, n\ge 1$.

(1) 证明子列$\{a_{2k-1}\}$和$\{a_{2k}\}$均为单调数列,其中$k\ge 1$;

(2) 证明数列$\{a_n\}$收敛,并求其极限.

49. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x\sin x}$.　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$　(3) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\tan x}{e^{2x}-1}=3$,求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

50. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x-1}{\sqrt{x^2+\cos x}}$,　(2) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$,　(3) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$,

(4) 设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求$\lim\limits_{x\to -1}f(x)$和$\lim\limits_{x\to 1^{-1}}f(x)$.

51. (1) 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$,并记此极限为$f(x)$;

(2) 指出$f(x)$的定义域并求出$f(x)$的间断点,并指出间断点的类型.

52. 设$x_n\le a_n\le y_n$,且$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$, $\{x_n\}$, $\{a_n\}$和$\{y_n\}$都是数列,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$(　)

(A) 一定不存在;　(B) 存在且等于0;　(C) 存在但不一定等于0,　(D) 不一定存在.

53. 下列陈述正确的是(　)

(A) 无界量必为无穷大量,　(B) 函数$f(x)$在点x_0连续,则必在x_0的某邻域内连续,

(C) $x=0$为$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$的可去间断点,

(D) 函数$f(x)=sgnx$在$[-1,1]$上没有原函数.

54. 计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\sqrt{\cos x})(e^{3x}-1)}{\tan x\cdot\ln(\cos 2x)}$.