极限与连续习题课

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n}}$. (20)
2. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2xe^{\frac{1}{x}}+\cos x}{x}$. (20)
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. (20)
4. 设
$$a_0=\frac{1}{2},\quad a_{n+1}=a_n(2-a_n),\quad n=0,1,2,\cdots.$$
试证：数列$\{a_n\}$收敛，并计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$. (20)
5. 设$a<b<c$, $f(x)$ 分别在$(a,b]$ 和$[b,c)$ 上一致连续, 证明$f(x)$ 在(a,c) 上一致连续. (20)

1. $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} \le I \le \sqrt[n]{n}$

$n\to\infty$ $\to 1$ $\qquad \to 1. \Rightarrow I=1.$

2. Taylor. 2.

3. let $t=\sqrt[6]{1+x}$. $x\to 0 \Leftrightarrow t\to 1$

$I=\frac{t^3-t}{t^2-1}=t\to 1.$

4. $a_{n+1}=1-(a_n-1)^2$. 归纳法. $0<a_n<1$. $\forall n$.

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n=a_n(1-a_n)>0$. $a_n\nearrow$.

又有上界. $\Rightarrow$ 有极限.

$a_{n+1}=a_n(2-a_n)$

$n\to\infty$. $a=a(2-a)\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=1.$

5. $\forall\varepsilon.\ \exists\delta_1.\ \forall |x_1-x_2|<\delta_1.\ x_1,x_2\in(a,b]$.

有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

$\exists\delta_2\ \forall |x_1-x_2|<\delta_2\ x_1,x_2\in[b,c)$.

有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. 若 $x_1\in(a,b]$. $x_2\in[b,c)$.

$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |f(x_1)-f(b)| + |f(x_2)-f(b)|$$

$$|x_1-b|,\ |x_2-b| < \delta \le \delta_1, \delta_2$$

$$< 2\varepsilon.$$

6. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}\right]$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数. (19)

7. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n\sin(\pi\sqrt{n^2+2019})$. (19)

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n$，其中$a,b,c>0$. (19)

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{\tan x}-e^x}{\sin x - x\cos x}$. (19)

10. (14 分) 实数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$b_n>0$. $c_n=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 证明：
   1. 数列$\{c_n\}$收敛.
   2. 若$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=+\infty$，则$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$. (19)

11. (10 分)数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1}=f(a_n)$，$a_n\ne0$且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$f(x)=x+\alpha\cdot x^k+o(x^k)\quad(x\to0)$，其中整数$k>1,\alpha\ne0$为常数. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot a_n^{k-1}=\frac{1}{(1-k)\alpha}$. (19)

6. $$\sin\frac{1}{n}\left(\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}-1\right) \le I_n \le \sin\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\tan\frac{1}{n}}$$

$n\to\infty$ $\downarrow 1$ $\downarrow 1$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} I_n = 1.$$

7. $$I = \lim_{n\to\infty} n\sin\left((\sqrt{n^2+2019}-n)\pi\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot2019\pi}{\sqrt{n^2+2019}+n} = \frac{2019}{2}\pi.$$

8. $$I = \lim_{x\to0} e^{\frac{\ln(a^x+b^x+c^x)/3}{x}} = e^{\frac{\ln abc}{3}}$$

$$= (abc)^{1/3}$$

9. $$I = \lim_{x\to0}\frac{e^x(e^{\tan x - x}-1)}{\sin x - x\cos x} = \lim_{x\to0}\frac{\tan x - x}{\sin x - x\cos x} \overset{洛}{=} 1.$$

10. (14 分) 实数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，$b_n > 0$. $c_n = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$. 证明：

1. 数列$\{c_n\}$收敛.
2. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = +\infty$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$. (19)

11. (10 分)数列$\{a_n\}$满足：$a_{n+1} = f(a_n)$, $a_n \neq 0$且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, $f(x) = x + \alpha \cdot x^k + o(x^k)$ $(x \to 0)$, 其中整数$k > 1, \alpha \neq 0$为常数. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a_n^{k-1} = \dfrac{1}{(1-k)\alpha}$. (19)

10. (2) 见之前习题讲义 / 指导手册 / 谢惠民.

仅证 $b_1 + \cdots + b_n$ 有界时.

$\forall \varepsilon$. $\exists N_1$ $\forall n > N_1$. $|a_n - a| < \varepsilon$.

$\exists N_2$. $\forall n > N_2$. $\forall p$. $b_{n+1} + \cdots + b_{n+p} < \varepsilon$.

$\forall n > \max\{N_1, N_2\}$. $|(a_{n+1} - a)b_{n+1} + \cdots + (a_{n+p} - a)b_{n+p}|$

$\leq |a_{n+1} - a||b_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p} - a|b_{n+p}$

$< \varepsilon^2$

$\Rightarrow \{(a_1 - a)b_1 + \cdots + (a_n - a)b_n\}$ 收敛.

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_1 - a)b_1 + \cdots + (a_n - a)b_n}{b_1 + \cdots + b_n} + a$$

$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 - a)b_1 + \cdots + (a_n - a)b_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_1 + \cdots + b_n} + a.$$

11. $$\lim_{n\to\infty} n \cdot a_n^{k-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}^{k-1}} - \frac{1}{a_n^{k-1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{k-1}(f(a_n))^{k-1}}{a_n^{k-1} - (f(a_n))^{k-1}}$$

$$\frac{1}{I} = \frac{a_n^{k-1} - (a_n + \alpha \cdot a_n^k + o(a_n^k))^{k-1}}{a_n^{k-1}(a_n + \alpha \cdot a_n^k + o(a_n^k))^{k-1}}$$

$$= \frac{a_n^{k-1} - (a_n^{k-1} + (k-1)\alpha a_n^{2k-2} + o(a_n^{2k-2}))}{a_n^{k-1}(a_n^{k-1} + (k-1)\alpha a_n^{2k-2} + o(a_n^{2k-2}))}$$

$$= \frac{(1-k)\alpha a_n^{2k-2} + o(a_n^{2k-2})}{a_n^{2k-2} + o(a_n^{2k-2})} = (1-k)\alpha \Rightarrow I = \frac{1}{\alpha(1-k)}$$

12. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n^3+n^2}-n)$. (18)

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n})^{n^2}$. (18)

14. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\sin x}-\cos x}{x^2}$. (18)

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{\sqrt[x]{a}}{3}+\frac{2\sqrt[x]{b}}{3})^x$, 其中$a$, b 为正实数 (18)

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^{2018}x - x^{2018}}{x^{2020}}$ (18)

17. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ (17)

18. 已知$a_n = n\sin(2\pi n!e)$ 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. (17)

都是 Taylor 展开.

12. $I = \lim\limits_{n\to\infty} n((1+\frac{1}{n})^{1/3}-1)$

$= \lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{1}{3n}+o(\frac{1}{n})) = \frac{1}{3}$

13. $e^{1/3}$ 14. $3/2$ 15. $a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$

16. $-\frac{1009}{3}$ 17. $n\pi/2$

18. $e = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+R_n(x)$.

$a_n = n\sin(2\pi R_n(x)) = \frac{\sin(2\pi R_n(x))}{R_n(x)} \cdot \frac{R_n(x)}{\frac{1}{n}} = 1$.

19. 设函数f在点a可导, 且$f(a)\neq 0$ 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right|^n$,其中$n$为自然数.(17)

20. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}$.(17)

21. 设$f(x)$有二阶导数连续,且$f(0)=f'(0)=0,\ f''(0)=6$,试求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.(17)

22. 设$\{a_n\}$是一个数列,λ为常数.

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lambda$,其中$\lambda$为常数.试证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lambda$.

(2)若p是大于1的正整数且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$.试证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$. (17)

23. 求极限$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-x)^{\frac{1}{x\tan(x)}}$ (16)

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{5}{x^5-1}\right)$.(16)

25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(2x)-\mathrm{e}^{2x}+2\sin(x)}{x+\ln(1-x)}$. (16)

26. 若有界数列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 与$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}n(a_n+b_n)=0$, 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+b_n\sqrt{n^2-\sqrt{n}}\right).$$

(16)

27. 假设$x_1=\dfrac{1}{9},\ x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x_n}\right)$. 证明: 数列$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的奇、偶子列都是严格单调的
界数列, 并且它们都收敛到同一有限值.(16)

28. 设$f(x)$ 为定义在$\mathbb{R}$ 上的周期函数, 在$x=0$ 附近有界, 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}[2f(x)-f(2x)]=0$.
极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. (16)

19. $e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$.

20. $e^{-1/2}$ 21. L'Hospital.

22.(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+p}-a_n}{n+p-p}=\dfrac{\lambda}{p}$.

23. $e^{1/2}$ 24. 0

25. $\dfrac{1-\frac{1}{2}(2x)^2-1-2x-\frac{1}{2}(2x)^2+2x+o(x^3)}{x-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=-8$.

26. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2\sqrt{n}}=0$$

有界.

27. $\lim x_{2n}=\lim x_{2n+1}=1$

29. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\ln(1-x)}$ (15)

30. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\cot x}{x}\right)$ (15)

31. 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n^2}e^n\right]$ (15)

32. 设$f(x)$在$x=0$有二阶导数，$f(0)=1, f'(0)=0$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^x$.(15)

33. 设$0<x_1<3$,$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 证明数列$\{x_n\}$ 的极限存在并求此极限.(15)

29. $3/2$. 30. $1/6$ 31. $e^{1/2}$.

32. 0

33. $x_{n+1}^2-x_n^2=x_n(3-2x_n)$

$$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\le\frac{x_n+(3-x_n)}{2}=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x_n \nearrow$ 且. 有界

$\Rightarrow$. $x=3/2$.