代数几何初步讲义

张磊 zhlei18@ustc.edu.cn

1 课程介绍

介绍自己：张磊, zhlei18@ustc.edu.cn, 代数几何: 代数簇的分类.

QQ群:631742293

1. 什么是代数几何?

(1) 一个数学分支: 对象、问题、方法

(2) 研究对象: 代数簇algebraic variety，即多项式的零点集$x^n + y^n = z^n$
系数$\mathbb{Q}, \mathbb{C}$, 微分结构、复结构、代数结构

(3) 不但研究单个代数簇的性质, 还研究代数簇之间的映射, 代数簇的形变、分类, 需要引入更多的概念: 概型、motive、stack;

(4) 代数几何、数论、拓扑、微分几何（复几何）、数学物理, 例如: 小平邦彦嵌入定理: $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$中的复子流形由代数方程定义.

2.代数几何的特点

(1) 高度抽象: 用代数描述几何, 用几何理解代数

(2) 高度包容: 使用微分几何、拓扑学等学科工具

(3) 语言普适性

(4) 形而上的和谐: 例如射影化, 相交理论, Grothendieck 标准猜想.

(5) 超越性: Hodge 猜想, Weil 猜想, Tate 猜想

例1.1. (理论发展) Bezout 定理: 射影平面曲线相交数

$$\sharp(F \cap G) = \deg F \cdot \deg G$$

除子相交数在有理等价下的不变性$\rightsquigarrow$ 相交理论(Hurzebruch-Riemann-Roch)

Pascal 定理(1639): 顶点在二次曲线上的六边形对边交点共线.

超曲面$V_p(X_0^3+X_1^3+X_2^3+X_3^3)=\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$上有恰好27条直线$\rightsquigarrow$ Gromov-Witten理论

例1.2. Frankel 猜想: 截面曲率处处为正的紧Kahler复流形X同构于射影空间$\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$.

Hartshorne 猜想: 如果一个光滑射影代数簇X的切从T_X是丰富的(ample), 那么这个代数簇同构于射影空间.

解决方案: Mori'79, 找足够多的有理曲线$\mathbb{P}^1$, 先找一条$f: C \to X$, 然后试图形变(Bend-and-Break), 形变空间$H^0(C, f^*T_X|_C) \geq \deg f^*T_X + \dim X(1-g(C))$, 障碍$H^1(C, f^*T_X|_C) = H^0(C, \omega_C \otimes (f^*T_X|_C)^*)$.

方案: 模p之后, 用Frobenius映射复合, 使得形变空间足够大, 固定基点后可以最终断裂, 得到有理曲线, 得到的有理曲线次数可控; 再用Hilbert概型的理论得到X 上有理曲线.

例1.3. Hodge 猜想: 设X是光滑射影代数簇. 则

$$H^{p,p}(X,\mathbb{Q}) := H^{2p}(X,\mathbb{Q}) \cap (H^{p,p}(X,\mathbb{C}) \subseteq H^{2p}(X,\mathbb{C}) \cong H^{2p}_{dR}(X/\mathbb{C}))$$

的元素来源于代数子簇对应的上同调类.

3.课程目标: 理解代数几何的基本概念, 掌握代数和几何语言的转换, 初步使用层的语言, 了解代数几何中最基本的结论.

4. 考核

(1) 平时成绩40, 包括考勤5分, 作业35分

(2) 期末考试60

5. 教材和参考书

(1) W. Fulton, Algebraic Curves: An introduction to algebraic geometry, 2008.

(2) Igor R. Shafarevich, Basic algebraic geometry 1, 2017.

(3) R. Hartshorne, Algebraic geometry. Springer-Verlag, New York, Graduate Texts in Mathematics 52, 1977.

6. 本课程内容

(1) 代数簇: 首先研究$\mathbb{A}^n = k^n$或者$\mathbb{P}^n_k$中的代数簇, 然后抽象出代数簇的概念, 并用代数语言定义光滑、维数等性质.

(2) 层和概型的基本理论

(3) 平面曲线, 相交理论

(4) Riemann-Roch定理, 上同调理论简介

2 代数簇（Algebraic varieties）

思想: 强调代数与几何之间的对应(函数和空间), 内蕴定义, 用代数语言定义光滑/奇点, 维数.

设k是一个代数闭域(未来会考虑更一般的域).

2.1 仿射(affine)代数簇

2.1.1 仿射代数集：多项式的公共零点集

定义2.1. 记$\mathbb{A}_k^n = k^n$, 称作仿射空间; 其中的一个仿射代数集指的是$k[x_1, \cdots, x_n]$中一族多项式S的公共零点集:

$$V((S) := \{(a_1, \cdots, a_n) | f(a_1, \cdots, a_n) = 0, \forall f \in S\}.$$

$V(f)$称作$\mathbb{A}_k$中的仿射超曲面, 未来将证明代数集是有限个超曲面的交集.

例子: $V(x^2 + y^2 + 1) \subset \mathbb{A}^2$.

命题2.1. *(1)* $V(\bigcup_i S_i) = \bigcap_i V(S_i)$.

(2) $V(S_1) \cup V(S_2) = V(\{f_i g_j | f_i \in S_1, g_j \in S_2\}$.

定义2.2. 将代数集作为仿射空间$\mathbb{A}_k^n = k^n$的闭集, 则得到**Zariski拓扑**, 并诱导了仿射代数集上的Zariski拓扑.

2.1.2 Neother 环

以下出现的环均为交换幺环, 环同态均为幺环同态.

回顾:

(1) A中的一个**理想(ideal)**指的是A的一个子集$I \subset A$满足

(a) I是$(A, +)$的一个子群，即$\forall x, y \in I$，有$x - y \in I$;

(b) $AI \subset I$，即$\forall x \in A, y \in I$，有$xy \in I$.

(2) 由子集生成的理想：设$S\subset A$是A的一个子集，由S生成的理想定义为

$$(S)=\{\sum_{i=1}^{k}x_is_i:x_i\in A,s_i\in S,i=1,\cdots,k;k=1,2\cdots\}.$$

可以验证(S)是A的理想.

(3) 有限生成的理想：设$I\subset A$是A的一个理想, 称I是**有限生成的**, 如果存在A的有限子集S使得$I=(S)$.

(4) **商环(quotient ring)**: 若$I\subset A$是A的一个理想, 则A/I是一个环, 称为A关于I的商环, 我们有自然的商映射$A\twoheadrightarrow A/I$.

(5) **环同态**: 设A,B是两个环, 映射$f:A\to B$是一个环同态, 指的是$\forall x,y\in A$,

(i) $f(x+y)=f(x)+f(y)$;

(ii) $f(xy)=f(x)f(y)$;

(iii) $f(1)=1$.

(6) 环同构定理: 设$f:A\to B$是环同态, 则$ker(f)\leq A$并且$Im(f)\cong A/ker(f)$; 设$I\leq J$, $A/I\cong\frac{A/J}{I/J}$; $I+J/J\cong I/(I\cap J)$; A的理想和A/I的理想对应.

(7) 整环(integral domain/domain):称A为整环，如果A中非零元都不是零因子, 等价地说, $x\in A,x\neq 0$,如果$xy=0$,则$y=0$.

(8) 域(field): 称A为一个域，如果A中非零元都是单位元.

(9) 极大理想, 素理想.

(10) 唯一银子分解整环(UFD), 主理想整环(PID), 欧式整环(ED).

命题2.2. 设$I\leq A$. 则

(1) I是素理想当且仅当A/I是整环;

(2) I是极大理想当且仅当A/I是域.

定义-命题2.1. 设A为交换幺环. 则以下两个条件等价:

(1) 所有理想都是有限生成的;

(2) A的每个理想升链终止, 即若有$I_1\leq I_2\leq I_3\leq\cdots\leq I_n\leq I_{n+1}\leq\cdots$ 则存在N使得$I_N=I_{N+1}=\cdots$.

此时称A是一个**Noether环**.

证明. (1) $\Rightarrow$ (2): 对于给定的理想升链, 有$J = \cup_i I_i$是一个理想. 可设$J = (x_1, \cdots, x_n)$. 由构造存在N使得$\{x_1, \cdots, x_n\} \subseteq I_N$, 从而$J = I_N = I_{N+1} = \cdots$.

(2) $\Rightarrow$ (1): 设$I \leq A$. 假设I不是有限生成的. 可以进行如下操作:
取$x_1 \in I \setminus (0)$,
取$x_2 \in I \setminus (x_1)$,
取$x_3 \in I \setminus (x_1, x_2)$,
...
从而得到严格递增的理想升链.

□

命题2.3. *Noether环的每个非空理想集合有极大元.*

例子: PID $(\mathbb{Z}, k[T])$是Noether 环.

命题2.4. *Noether环的商环也是Neother环.*

定理2.1. *(Hilbert Basis) 若R是Noether环, 则$R[x]$是Noether环.*
($\Rightarrow R[x_1, \cdots, x_n]$是Noether环)

证明. 我们验证$R[x]$的理想是有限生成的. 设$J \subset R[x]$的一个理想.

记J_n为J中的n次多项式集合, n次多项式的的首项系数和0的集合记作I_n.

容易验证$I_n \leq R$, 而且$I_n, n = 0, 1, 2,$是单调递增理想. 因为R是Noether, 存在N使得$J_N = J_{N+1} = \cdots$, 而且对$i = 0, 1 \cdot, N$, 可以假设$I_n = (a_{i1}, \cdots, a_{il_i})$, 于是存在$f_{ij}(x) \in J_n$使得$f_{ij} = a_{ij}x^i + \cdots$.

接下来证明$J = J' := (\{f_{ij}(x)\}_{0 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq l_i})$. 利用归纳法. 首先$J_0 = I_0 \subseteq J'$. 现在假设$J_{n-1} \subseteq J'$. 取$f(x) \in J_n$.

演示$n \leq N$的情形. □

作业: (1) 若A是Noether环, 则$A[[x]]$是Noether环.

(2) 作业: 区间$(0,1)$上的连续实函数集$\mathcal{C}((0,1))$（定义$+, \cdot$为函数的加法和乘法）不是Noether环.

2.1.3 阅读材料: Noether 模

定义: 如果R-模M满足如下等价条件之一, 则称之为Noether模.

(i) 子模升链终止; (ii) M的每个子模都是有限生成的.

命题: (1) Noether 模的子模和商模为诺特模;

(2) 设有正合列$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, 如果$M', M''$Noether, M也是.

(3) Noether模的有限直和是Noether;

(4) 设R是Noether环, 则有限生成R-模是Noether模.

Proof. (2) 直接找生成元. (3, 4) 来源于(1,2).

2.1.4 代数集与理想之间的关系

设$S \subset k[X_1, \cdots, X_n]$是任一子集, 记$I = (S)$是由$S$生成的理想. 则

$$V(S) = V(I).$$

因此, 代数集都可以写成$V(I)$的形式, 其中$I \subset k[X_1, \cdots, X_n]$是一个理想.

由Noether性, 可设$I = (f_1, \cdots, f_r)$, 则$V(S) = V(I) = V(f_1, \cdots, f_r)$.

命题2.5. 设$I, J \leq k[X_1, \cdots, X_n]$.

(0) $I \subseteq J$, *则*$V(I) \supseteq V(J)$*;*

(1) $V(I + J) = V(I) \cap V(J)$*;*

(2) $V(I \cap J) = V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$*.*

定义2.3. 设$I \subset A$是理想, 定义I的根为

$$\sqrt{I} = \{f \in A : \exists m \geq 0 \text{ s.t. } f^m \in I\}.$$

根理想(radical ideal): 称I为一个根理想, 如果$I = \sqrt{I}$.

容易验证: $\sqrt{I}$是理想, $\sqrt{I} \supset I$, 并且$V(\sqrt{I}) = V(I)$.

从而, 任一代数集都能写成$V(I)$的形式, 其中$I = \sqrt{I} \subset \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$是根理想.

定义2.4. 对$X \subseteq \mathbb{A}^n$, 则$I(X) = \{f \in k[x_1, \cdots, x_n] | f(X) = 0\}$是一个根理想, 称作$X$的零化理想.

命题2.6. *(1)* $\sqrt{I} \subseteq I(V(I))$; *(2)* $V(I) = V(I(V(I)))$.

仿射代数集可以对应到一个根理想, $X = V(I) \to I(X)$, 这个对应是单射.

问题: 仿射代数集可以对应到一个根理想, $X = V(I) \to I(X)$, 这个对应是单射; 这个对应是否是一一对应? 需要验证$\sqrt{I} = I(V(I))$?

作业: (1) 如果k不是代数闭域, 上面的对一个不是一一的; (2)仿射代数集是紧的.

2.1.5 Hilbert零点定理(Hilbert Nullstellensatz)

定理2.2. *(Hilbert 零点定理)* 设k是代数封闭域, $A = k[x_1, \cdots, x_n]$, 则

(1) A的极大理想形如$(x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$;

(2) 如果理想$I \neq R$, 则I中的多项式有公共零点.

定理告诉我们$X = V(I)$上的点和包含I的极大理想一一对应, 该定理证明放到最后(阅读).

作为应用可得

推论2.1. 设$X = V(I)$, 则$I(X) = \sqrt{I}$. 从而$\mathbb{A}^n$中的代数集和环$k[x_1, \cdots, x_n]$的根理想一一对应.

证明. 只需证明$I(X) \subseteq \sqrt{I}$. 取$f \in I(X)$.

考虑$\mathbb{A}^{n+1}$, 坐标设为$x_1, \cdots, x_n, y$. 令$J = (I, 1 - yf)$. 于是$V(J) = \emptyset$, 从而$J = (1)$.

令$R = k[x_1, \cdots, x_n]$. 则$I[y] \leq R[y]$. 在$R[y]/I[y] \cong (R/I)[y]$中$J/I[y] = (1)$. 于是存在$u(x, y) \in k[x, y]$使得$u(x, y)(1 - yf(x)) \equiv 1 \ (mod\ I[y])$. 设$u(x, y) = a_0(x) + \cdots + a_m(x)y^m$. 则

$$(a_0(x) + \cdots + a_m(x)y^m)(1 - yf(x)) \equiv 1 \ (mod\ I[y])$$

于是得到

$$a_0 \equiv 1, a_1 \equiv a_0 f, \cdots, a_m \equiv a_{m-1} f, a_m \equiv 0 \ (mod\ I).$$

这意味着$f^m \in I$. $\square$

2.1.6 阅读: 整扩张的基本知识

定义: 设R是S的子环, 更一般的是$\iota : R \to S$是幺环同态.

(1) $s \in S$在R上**整(integral)**, 如果存在首一多项式$f(x) \in R[x]$使得$f(s) = 0$;

(2) 如果S中的元素在R上整, 则称S/R是**整扩张**;

例子: $S = R[x]/(x^2 - 1)$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]/(2x^2 - 1)$, $\bar{x}$非整, $2\bar{x}$在$\mathbb{Z}$ 上整, 其整闭包是什么?

定理2.3. *(整性和有限)* 记号如上. 取$s \in S$. *TFAE*

(1) s*在*R*上整;*

(2) $R[s]$*是f.g.* R*-模;*

(3) 存在子环$R \subseteq T \subseteq S$*使得*$s \in T$*并且*$T$*是f.g.* R*-模.*

证明. (3) $\Rightarrow$ (1): 设作为f.g. R-模$T = (t_1 = 1, \cdots, t_n)$. 则存在$A \in M_n(R)$使得

$$(st_1, \cdots, st_n) = (t_1, \cdots, t_n)A \ \Rightarrow \ (t_1, \cdots, t_n)(sI - A) = 0$$

对两侧$\cdot(sI - A)^*$, 得到$\det(sI - A) = 0$. $\square$

Hamilton-Cayley 定理: 设$A \in M_n(k)$, $f(x) = \det(xI - A)$, 则$f(A) = 0$.

命题: 设有环的包含关系: $R \subset T \subset S$, 如果T是f.g. R-模(称T/R**有限**), S/T有限, 则S/R 有限.

推论: (1) 整闭元素关于加减乘封闭, 从而R'是S的子环(R'是S中在R上整的元素集合);

(2) 设S是R上的f.g代数, 那么S/R有限$\Leftrightarrow$ S/R整;

(3) 整扩张的复合仍是整扩张.

2.1.7 阅读: Hilbert零点定理的证明

首先证明一个深刻的结论.

定理2.4. *(Noether正规化定理)* 设k是域, $R = k[x_1, \cdots, x_n]/I$. 则存在$r \geq 0$, $y_1, \cdots, y_r \in R$ 满足:

(1) $y_1, \cdots, y_r$代数无关; (2) $R/k[y_1, \cdots, y_r]$是整扩张.

证明. 不妨设$I \neq 0$, 即$\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n$代数相关. 为了展现几何直观, 我们课堂假设$|k| = +\infty$. 取$f(x_1, \cdots, x_n) \in I$.

Claim: 可以做一个线性变换(诱导了同构$R = k[x_1, \cdots, x_n]/I \cong k[y_1, \cdots, y_n]/J$), 使得

$$f(x_1(y_1, \cdots, y_n), \cdots, x_n(y_1, \cdots, y_n)) = y_n^N + a_{N-1}(y_1, \cdots, y_{n-1})y_n^{N-1} + \cdots + a_0(y_1, \cdots, y_{n-1}).$$

从而$R/k[\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_{n-1}]$是整扩张. 然后考虑$R' = k[\bar{y}_1, \cdots, \bar{y}_{n-1}] = k[y_1, \cdots, y_{n-1}]/J'$, 归纳即可得到证明. □

例2.1. 几何意义: $R = \mathbb{R}[x, y, z]/(xyz + x^2y + z^2y)$, 投影$(x, y, z) \mapsto (y' = y - x, z' = z - x)$, 利用变量替换$y = y' + x, z = z' + x$, $xyz + x^2y + z^2y = 3x^3 + a(y', z')x^2 + \cdots$ 于是$R/\mathbb{R}[y', z']$ 为有限扩张.

证明*(Hilbert 零点定理)*. 事实上只需证明(1).

首先证明引理:

引理: 设S是整环, K是域, K/S是有限扩张, 那么S是域.

Proof. 只需说明$0 \neq s \in S$可逆, 即$1/s \in S$. 这是因为$1/s$在S上整.

回到定理证明. 设m是极大理想, $K = R/m$. 根据Noether正规化定理, 我们可以得到在R中$y_1, \cdots, y_r$在k 上代数无关的函数, 使得$K/k[y_1, \cdots, y_r]$是整扩张. 由引理知, $k[y_1, \cdots, y_r]$是域, 从而$r = 0$, 再根据k是代数闭域, 得k-代数$K = R/m \cong k$. 换句话说, 自然嵌入$k \to R/m$是满射, 从而存在$a_1, \cdots, a_n$ 使得$\bar{a}_i = \bar{x}_i$, 于是得到$m = (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n)$. □

2.1.8 阅读: 环的局部化和局部环

设R是交换幺环, 假设非空子集$S \subset R$是**乘性子集**, 即满足$1 \in S$, 而且如果$a, b \in S$则$ab \in S$.

例子: $S=R^*$; $S=\{1,s,s^2,\cdots,\}$; $S=R\setminus P$其中P是S的素理想.

Step 1: 在$R\times S$上定义等价关系"$\sim$", $(r_1,s_1)\sim(r_2,s_2)\Leftrightarrow \exists s\in S,\ s(r_1s_2-r_2s_1)=0$.

Step 2: 令$S^{-1}R=R\times S/\sim$, 元素$\overline{(r,s)}$记作$\frac{r}{s}$ 于是

$$\frac{0}{s_1}=\frac{0}{s_2},\frac{s}{s}=\frac{1}{1},\frac{s'r}{s's}=\frac{r}{s}.$$

Step 3: 定义加法"+", "$\cdot$".

$$\frac{r_1}{s_1}+\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1s_2+r_2s_1}{s_1s_2},\ \frac{r_1}{s_1}\cdot\frac{r_2}{s_2}=\frac{r_1r_2}{s_1s_2}$$

容易验证运算是良定义的, 并且能赋予$S^{-1}R$环结构, 零元素$\frac{0}{s}$, 单位元$\frac{s}{s}$.

易知$\frac{r_1}{s}+\frac{r_2}{s}=\frac{r_1+r_2}{s}$.

我们有自然同态$\iota:R\to S^{-1}R$. 称$S^{-1}R$是R的**局部化**.

定理(局部环的泛性质): 设$\phi:R\to R'$是环同态, $S\subset R$是乘性子集. 假设$\phi(S)\subseteq R'^*$(可逆). 那么存在唯一的延拓: $\tilde{\phi}:S^{-1}R\to R'$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\iota"] & R' \\
S^{-1}R \arrow[ur, "\tilde{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof. 令$\tilde{\phi}:S^{-1}R\to R'$, $\frac{r}{s}=\phi(s)^{-1}\phi(r)$, 该定义良定.

定义: 如果R有唯一的极大理想m (等价于$R^*=R\setminus m$), 则称(R,m)为**局部环**, $k=R/m$为**留数域**(residue field).

命题(作业): 取$P\in\operatorname{Spec}(R)$, $S=R\setminus P$ 则$(R_P:=S^{-1}R,PR_P=S^{-1}P)$是局部环, $R_P/PR_P\cong Frac(R/P)$.

Proof. 如果$r\notin P$, 则r/s在R_P中可逆, 所以$(R_P:=S^{-1}R,PR_P=S^{-1}P)$. 考虑自然同态$R/P\to R_P/PR_P$, 用泛性质可以证明这个同态诱导$Frac(R/P)\cong R_P/PR_P$

命题: 设R是整环, 对$P\in\operatorname{Spec}(R)$, 有自然的嵌入$R\subseteq R_P\subseteq K(R)$. 我们有

$$R=\cap_{m\in\operatorname{Max}(R)}R_m.$$

证明: **用单位分解的想法**.

任取$\alpha \in K$, 则对于每个$m \in \mathrm{Max}(R)$, 存在$r_m, s_m \notin m$使得$\alpha = r_m/s_m$, 即$s_m\alpha \in R$. 由$(\{s_m\}) = R$, 存在$u_1, \cdots, u_r \in R$使得

$$u_1 s_{m_1} + \cdots + u_r s_{m_r} = 1$$

从而$\alpha = \sum_i u_i \cdot (s_{m_i}\alpha) \in R$.

2.1.9 代数集的不可约分支分解

以下代数集在$\mathbb{A}^n$中.

定义2.5. 代数集X如果满足如下条件: 若$X = X_1 \cup X_2$, 其中X_i是代数集(Zariski拓扑下的闭集), 则必有$X = X_1$或者$X = X_2$, 则称X是**不可约的**(irreducible).

注: 不可约代数代数集的每个非空开集稠密, 任意两个非空开集相交.

命题2.7. *代数集X不可约当且仅当$I(X)$是素理想.*

证明. "$\Rightarrow$": 否则存在$f, g \in (A \setminus I(X))$, $fg \in I(X)$. 令$Y = V_X(f) := V(f, I(X)), Z = V_X(g)$. 可直接验证$Y, Z$是$X$的真闭子集, 而且$X = Z \cup Y$.

"$\Leftarrow$": 作业. □

命题2.8. *(1) 代数集严格降链有限长度.*

(2) 代数集X可以唯一分解为$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_m$, 其中每个$X_i$不可约, 而且互不包含. 我们称$X_i$为$X$的不可约分支.

证明. (1) 根据Neother性质.

(2) 存在性: 如果X不可约, 则结论成立. 否则$X = X_1 \cup X_2$, 以此类推得到降链. 唯一性: 作业. □

作业: (1) 把超曲面$V(F = x^2 \cdot (y^2(x-1) + x^3))$分解为不可约分支并集; (2) 把$V(x^2, y^2(x-1) + x^3)$分解为不可约分支并集.

定义2.6. 设X是仿射代数集, 有自然同态$k[x_1, \cdots, x_n] \to Func(X \to k)$, 像集记作$Poly(X) := Im(k[x_1, \cdots, x_n] \to Func(X \to k)$, 称作**多项式函数**. 于是

$$Poly(X) \cong k[x_1, \cdots, x_n]/I(X).$$

注: (1) X上的点和$Poly(X)$的极大理想一一对应; (2) X的每个闭集形如$V_X(f_1, \cdots, f_m)$, 其中$f_i \in Poly(X)$.

2.1.10 仿射代数簇以及上面的函数

不可约仿射集称作**仿射代数簇**, 形如$X = V(P)$, 其中P是一个素理想.

作业: 取$f \in Poly(X)$, 则$f : X \to \mathbb{A}^1$是连续映射.

命题2.9. *(1) X是代数簇当且仅当$Poly(X)$是整环;*

(2) 设X是仿射簇, 如果两个多项式函数f_1, f_2在一个非空开集$U \subseteq X$上取值一致, 那么$f_1 = f_2$.

证明. (2) $X = \bar{U} \subset V_X(f_1 - f_2)$. □

定义2.7. 设X是仿射簇, 记$K(X) = Frac(Poly(X))$, 元素称作X上的**有理函数**. 设$\varphi \in K(X)$, $x \in X$, 如果存在$f, g \in Poly(X)$使得$\varphi = f/g$ 以及$g(x) \neq 0$, 则称φ在x处有定义, 所有有定义的点$Dom(\varphi)$称作有理函数φ的定义域.

例2.2. $X = \mathbb{A}^n$; 令$X = V(xy - zw) \subset \mathbb{A}^4$, 有理函数$\varphi = x/z = w/y$, 在$z \neq 0, y \neq 0$是有定义的; $X = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$, 有理函数$\varphi = (y/x)^2 = x$ 处处有定义.

命题2.10. *(作业) 设X是一个仿射代数簇.*

(1) 一个有理函数的定义域是X的开集.

(2) 如果两个有理函数φ_1, φ_2在一个非空开集作为映射在$U \subseteq X$上取值一致, 那么在$K(X)$中$\varphi_1 = \varphi_2$.

问题: 对$\varphi \in K(X)$, 如果$Dom(\varphi) = X$, 那么$\varphi \in Poly(X)$?

2.1.11 局部正则函数

定义2.8. 设X是仿射代数簇, 设$U \subseteq X$是一个非空开集, 一个函数$f : U \to k$被称作U上的**正则函数**, 如果对任意$x \in U$, 存在x的开邻域V_x以及有理函数φ_x使得$f|_{V_x} = \varphi_x|_{V_x}$. U上的正则函数集合记作$Reg(U)$.

注: X的任意两个非空开集相交并且$K(X)$中的函数由在一个开集上的取值确定, 所以$f \in Reg(U)$**可以唯一地被**$K(X)$**中的元素表达, 从而**$Reg(U) = \{\varphi \in K(X) |\ U \subseteq Dom(\varphi)\}$**.可将**$Reg(U)$**视为**$K(X)$ **的子环.**

定义2.9. 设X是仿射代数簇, 取一点$x \in X$, 在x的一个邻域中正则的函数($u = f/g : V \to k$)集合记作$\mathcal{R}_x$. 如果$u, v \in \mathcal{R}_x$在x中的某个邻域相等, 则称他们等价, 记作$u \sim v$. 易知$\sim$是一个等价关系, 令$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{R}_x / \sim$, 称作在$x$处**正则函数茎**(stalk). 事实上, $\mathcal{O}_{X,x}$也可以定义为在x点附近有定义的有理函数的集合.

命题2.11. *设X是仿射代数簇, 则*

(1) 可将$\mathcal{O}_{X,x}$视为$K(X)$的子环, $Reg(U) = \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$;

(2) 记$m_{X,x}$为$\mathcal{O}_{X,x}$中在x取零点的函数集合. 则$(\mathcal{O}_{X,x}, m_{X,x})$是一个局部环, 自然映射$k \to \mathcal{O}_{X,x}/m_{X,x}$ 是同构.

(3) 记m_x是$Poly(X)$中在x取零的多项式函数集, 则$\mathcal{O}_{X,x} = Poly(X)_{m_x}$.

证明. (1) 考虑自然映射$R_x \to K$, 验证$\sim$恰好对应映射的核.

(2) 可以直接验证$m_{X,x}$是极大理想, 然后验证不在里面的函数可逆.

(3) 在$K(X)$中验证互相包含关系. □

定理2.5. *设X是仿射代数簇, 则*

(1) $Reg(X) = Poly(X)$, 以后记作$\Gamma(X)$.

*(2) 取$f \in \Gamma(X)$, $D_X(f) := \{x \in X | f(x) \neq 0\}$称作$X$的**一个主开集**. 则$\Gamma(D(f)) = \Gamma(X)_f$.*

证明. (1) 利用交换代数中的结论:

命题: 设R是整环, 对$P \in \mathrm{Spec}(R)$, 有自然的嵌入$R \subseteq R_P \subseteq K(R)$. 我们有

$$R = \bigcap_{m \in \mathrm{Max}(R)} R_m.$$

(2) 可以仿照以上证明得到: 取$\varphi \in Reg(D(f))$, 要证明$\varphi \in \Gamma(X)_f$. 第一步证明存在有限多个表达方式$\varphi = u_1/v_1 = u_2/v_2 = \cdots = u_r/v_r$使得$V_X(v_1, \cdots, v_r) \subseteq V_X(f)$, 从而存在$m > 0$, 使得$f^m \in (v_1, \cdots, v_r)$, 于是$f^m = a_1v_1 + \cdots + a_rv_r$, 进而得到

$$f^m\varphi = a_1u_1 + \cdots + a_ru_r \in \Gamma(X).$$

交换代数风格的证明: 将$\Gamma(D(f)),\Gamma(X)_f$视为$K(X)$的子集, 显然$\Gamma(X)_f \subseteq \Gamma(D(f))$. 注意$\mathrm{Max}(R_f)=\{m\in \mathrm{Max}(R)|f\notin m\}$. 所以

$$\Gamma(D(f))=\cap_{f(x)\neq 0}Reg(X)_{m_x}=\cap_{f\notin m_x}Poly(X)_{m_x}=\cap_{f\notin m_x}(\Gamma(X)_f)_{m_x}=\Gamma(X)_f.$$

□

作业: (1) 叙述正向极限的定义;

(2) $\mathcal{O}_{X,x}=\varinjlim_{x\in V}Reg(V)$.

2.1.12 仿射代数簇之间的映射

设$X\subseteq \mathbb{A}^n, Y\subseteq \mathbb{A}^m$是仿射代数集. 称一个映射$\phi: X\to Y$是一个**多项式映射**, 如果$\phi=(\bar{u}_1,\cdots,\bar{u}_m)$, 其中$\bar{u}_i\in\Gamma(X)$.

命题2.12. 映射ϕ诱导k-代数同态

$$\phi^*:\Gamma(Y)=k[y_1,\cdots,y_m]/I(Y)\to \Gamma(X)=k[x_1,\cdots,x_n]/I(X)$$

$$\overline{h(y_1,\cdots,y_m)}\mapsto h\circ\phi=h(\bar{u}_1(x),\cdots,\bar{u}_m(x)),\ \phi^*\bar{y}_i=\bar{u}_i(x).$$

例2.3. (1) 令$\phi: X=V(xy-1)\subset\mathbb{A}^2\to\mathbb{A}^1,\ (x,y)\mapsto x$. 则$\phi^*=?$.

(2) 令$\phi:\mathbb{A}^1\to V(y^2-x^3)\subset\mathbb{A}^2,\ t\mapsto(t^2,t^3)$. 则$\phi^*=?$

定理2.6. 多项式映射集$Poly(X,Y)$和k-代数同态集$Hom_{k-alg}(\Gamma(Y),\Gamma(X))$一一对应.

证明. 一个方向$Poly(X,Y)\to Hom_{k-alg}(\Gamma(Y),\Gamma(X)),\ \phi\mapsto\phi^*$, 易知$\phi^*$是$k$-代数同态.

反之, 给定k-代数同态$\eta:\Gamma(Y)=k[y_1,\cdots,y_m]/(I(Y))\to\Gamma(X)=k[x_1,\cdots,x_n]/(I(X))$, 令

$$\bar{u}_1=\eta(\bar{y}_1),\cdots,\bar{u}_m=\eta(\bar{y}_m)\in k[x_1,\cdots,x_n]/(I(X)).$$

定义$\phi: X\to\mathbb{A}^m,\ x\mapsto(\bar{u}_1(x),\cdots,\bar{u}_m(x))$.

验证$\phi(X)\subseteq Y$, 并且$\phi^*=\eta$. □

定义2.10. 设$X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$是仿射代数簇. 一个**有理映射**$\psi : X \dashrightarrow Y$由一组有理函数$v_1, \cdots, v_m \in K(X)$ 给出: 存在X的一个非空开集U, 使得

$$\forall x \in U, \psi(x) = (v_1(x), \cdots, v_m(x)) \in Y.$$

有理映射ψ的**定义域**$Dom(\psi) = \bigcap_i Dom(v_i)$. 如果有理映射$\psi$的定义域$Dom(\psi) = X$, 则$\psi$是多项式映射.

例2.4. $\psi : X = V(xy - z^2) \dashrightarrow \mathbb{A}^1, (x, y, z) \mapsto z/x.$

问题: 有理映射可否拉回"函数"? $\mathbb{A}^1 \dashrightarrow \mathbb{A}^2, x \mapsto (1/x, 1/x^2)$.

事实上: $\psi^* : \Gamma(Y) \to Reg(U = Dom(\psi)) \subset K(X)$.

定义2.11. 设$\psi : X \dashrightarrow Y$是有理映射. 如果像集$\psi(X)$在$Y$中稠密, 则称$\psi$是支配的(dominant).

$\mathbb{A}^1 \dashrightarrow V(z = y^2) \subseteq \mathbb{A}^2, x \mapsto (1/x, 1/x^2)$.

命题2.13. *(1) 有理映射$\psi : X \dashrightarrow Y$是支配的当且仅当$\psi^* : \Gamma(Y) \to Reg(U) \subset K(X)$是单射.*

(2) 存在集合间的一一对应: 支配映射集$DomRat(X, Y) \rightleftarrows Hom_{k-alg}(K(Y), K(X))$.

证明. 设$X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$, 以及$\psi = (v_1(x), \cdots, v_m(x))$. 先定义:

$$\psi^* : \Gamma(Y) = k[y_1, \cdots, y_m]/I(Y) \to Reg(U) \subset K(X),\ \bar{y}_i \mapsto v_i.$$

由支配性质, 可得ψ^*是单射, 从而延拓为$\psi^* : K(Y) \to K(X)$. □

作业: (1) 多项式映射的复合是多项式映射.

(2) 有理映射是否能够做复合映射?

(3) 支配的有理映射可以复合为支配的有理映射.

(4)(非常有挑战性, 选做) 称支配有理映射$\psi : X \dashrightarrow Y$是**双有理的**, 如果$\psi^* : K(Y) \cong K(X)$. 请证明对于双有理映射$\psi : X \dashrightarrow Y$, 存在逆映射$\phi : Y \dashrightarrow X$, 满足

- 存在X的开集U和Y的开集V 使得$\psi : U \to V$以及$\phi : V \to U$互为逆映射. $\phi \circ \psi : X \dashrightarrow X$可以延拓为恒等映射.

例子: $\psi : \mathbb{A}^1 \dashrightarrow \mathbb{A}^1, t \mapsto 1/t$. 求其逆映射.

2.2 射影代数簇

问题: 为什么要引入射影代数簇? (形而上的和谐)

2.2.1 射影空间和射影集

定义2.12. n**维射影空间**: $\mathbb{P}_k^n = k^{n+1} \setminus \{0\}/k^* = \{[X_0 : \cdots : X_n] : X_i \in k$不全为$0\}/\sim$. 一维射影空间$\mathbb{P}_k^1$称作射影直线, $\mathbb{P}_k^2$称作射影平面.

我们有$\mathbb{P}^n$的仿射分解:

$$\mathbb{P}^n = \bigcup_{i=0}^n U_i, U_i = \{[X_0 : \cdots : X_n] \in \mathbb{P}^n : X_i \neq 0\}.$$

$\phi_0 : U_0 \cong k^n, [X_0, \cdots, X_n] = [1, x_1 = \frac{X_1}{X_0}, \cdots, x_n = \frac{X_n}{X_0}] \mapsto \left(\frac{X_1}{X_0} \cdots, \frac{X_n}{X_0}\right)$.

在自然$k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}_k^n$下, $\mathbb{P}_k^n$中的点对应过原点的直线, U_0恰好对应这些直线和$X_0 = 1$的交点.

观察: $f \in k[X_0 : \cdots : X_n]$, 记$f = f_d + f_{d-1} + \cdots + f_1 + f_0$, 其中$f_i$是$i$次齐次多项式, 则

$$f(\lambda[X]) = \lambda^d f_d(\lambda[X]) + \lambda^{d-1} f_{d-1}(\lambda[X]) + \cdots .$$

事实上$f(\lambda[X])$并不是$\mathbb{P}_k^n$上的函数, 但是可以考虑可以考虑零点集合,
$f(\lambda[X]) \equiv 0 \Leftrightarrow \forall i, f_i([X]) = 0$.
考虑齐次多项式的零点是有意义的.

定义2.13. 一个**射影代数集**定义为$\mathbb{P}^n$中某一些齐次多项式的公共零点, 设$S \subseteq k[X_0, \cdots, X_n]$ 是一些齐次多项式, 记$V_p(S)$为对应的射影代数集。

射影代数集作为闭集定义$\mathbb{P}_k^n$中的**Zariski拓扑**, 射影代数集继承Zariski拓扑.

例2.5. $V_p(XY - ZW) \subset \mathbb{P}^3$; $V_p(X - Z, Y - W) \subset \mathbb{P}^3$.

命题2.14. *(1) $\mathbb{P}^n$中的射影代数集和U_0的交集是仿射代数集.*

(2) U_0作为在射影空间$\mathbb{P}^n$的开集, 继承的Zariski 拓扑和其本身的Zariski拓扑是一致的.

证明. (1) $V_p(F(X_0, \cdots, X_n) \cap U_0 = V(F(1, x_1, \cdots, x_n))$.

(2) 给定$f(x_1,\cdots,x_n)$, 可以齐次化为$F=X_0^N f$. 则$V_p(F)\cap U_0=V(f)$. 从而两种方式得到的闭集是吻合的.

$\square$

作业: 把例子中的射影代数集限制到仿射空间$U_0=\{X\neq 0\}$中确定定义方程.

2.2.2 分次环和齐次理想

分次环(graded ring): 一个分次环S是一个环, 可以分解为Abel子群的直和$S=\bigoplus_{d\geq 0}S_d$, 满足$\forall d,e\geq 0, S_d\cdot S_e\subset S_{d+e}$. S_d中的元素称为d次齐次元素，因此S中任一元素可唯一写成有限个齐次元素之和。

例如: $S=k[X_0,\cdots,X_n]=\bigoplus_{d\geq 0}S_d$，$S_d=\{$所有$d$次齐次多项式$\}$.

齐次理想(homogeneous ideal)**:** 设$S=\bigoplus_{d\geq 0}S_d$是一个分次环, 称一个理想$I\subset S$ 是一个齐次理想，如果

$$I=\bigoplus_{d\geq 0}(I_d=I\cap S_d).$$

由此我们得到**分次商环**$S/I:=\bigoplus_{d\geq 0}(S_d(I\cap S_d))$.

命题2.15. 记号如上.

(1) 理想I是齐次的当且仅当I可由齐次元素生成;

(2) 若I,J是齐次理想, 则$I+J, IJ, I\cap J, \sqrt{I}$都是齐次理想.

(3) 齐次理想P是素理想当且仅当: 对齐次元素$x,y\in S$, 若有$xy\in P$, 则必有$x\in P$或者$y\in P$ (作业).

证明. (1) 验证“$\Leftarrow$”. 只需验证对$a\in I$, 若$a=a_0+\cdots+a_n$是分次分解, 则$a_d\in I_d$. 一看, 还真是.

(2) 非平凡情形$I\cap J,\sqrt{I}$. 对$a\in I\cap J$, 若$a=a_0+\cdots+a_n$是分次分解, 则$a_d\in I_d\cap J_d$.

$\sqrt{I}$的情形留作作业. $\square$

作业(阅读):

(1) 设$X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$, 如果$X$是一个过原点的锥, 则$I(X)$是一个齐次理想; 反之如果$I$是齐次理想, 则$V(I)$是一个过原点的锥.

(2) 若$X \subset \mathbb{P}^n$, 请定义$I_p(X)$, 这是一个齐次根理想.

(3) 若X是射影代数集, 则$X = V(I_p(X))$.

思考: 射影代数集和齐次理想之间的对应.

2.2.3 齐次理想和射影代数集

注: 在自然$k^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n_k$下, 射影代数集$V_p(S)$对应$V(S) \subseteq k^{n+1}$, 这是一个锥(cone, 何为锥?). 更一般的, 一个集合$X \subseteq \mathbb{P}^n$在k^{n+1}中对应一个锥$C(X)$. 对$X \subseteq \mathbb{P}^n$, 可以定义$I_p(X) := \{F \in k[X_0, \cdots, X_n] | F(\lambda[\underline{X}]) \equiv 0, \forall \lambda \in k\}$. 易证$I_p(X) = I(C(X))$是齐次理想.

定理2.7. *(射影Hilbert 零点定理) 设$I \leq k[X_0, \cdots, X_n]$是齐次理想, $X = V_p(I) \subseteq \mathbb{P}^n$. 则*

(i) $X = \emptyset$当且仅当$\sqrt{I} \supseteq (X_0, \cdots, X_n)$, 当且仅当$\exists N > 0$ s.t. $I \supset (X_0, \cdots, X_n)^N$, 即所有次数$\geq N$的齐次多项式均在$I$中.

(ii) 若$X \neq \emptyset$, 则$I_p(X) = I_p(V_p(I)) = \sqrt{I}$.

证明. 不妨设$I \neq (1)$, 故$\emptyset \neq V(I) \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$. 注意

$$V_p(I) = \emptyset \Leftrightarrow V(I) = (0, 0, \cdots, 0),$$

由Hilbert 零点定理可以得到(1).

将X对应于k^{n+1}中的锥$C(X)$, 则$I(C(X)) = I_p(X)$. □

命题2.16. *射影代数集X不可约当且仅当$I_p(X)$是素理想.*

命题2.17. *(1) 射影代数集降链有有限长度.*

(2) 射影代数集X可以唯一分解为有限多个不可约分支的并集.

2.2.4 射影簇和函数

不可约射影代数集称为**射影代数簇**, 其形如$X = I_p(P)$其中P是一个齐次素理想, 于是得到分次环$S_X := k[X_0, \cdots, X_n]/P$.

定义2.14. 设$X = I_p(P)$是射影簇, 其中P是一个齐次素理想, $S := k[X_0, \cdots, X_n]/P$, 取$\overline{F(X_0, \cdots, X_n)}, \overline{G(X_0, \cdots, X_n)} \in S_d$, 假设$\deg(F) = \deg(G)$并且$\bar{G} \neq 0$, 则$u = \frac{\overline{F(X_0, \cdots, X_n)}}{\overline{G(X_0, \cdots, X_n)}}$在$X$的开集$G \neq 0$ 上的一个函数, 称作射影簇X 上的**有理函数**.

有理函数集$K(X)$是一个域, 称作X的**有理函数域**.

命题2.18. *(1) 设$X \subseteq \mathbb{P}^n$是射影代数簇, 设$Y := X \cap (U_0 \cong \mathbb{A}^n) \neq \emptyset$. 则$Y$是仿射代数簇, 而且$K(X) = K(Y)$.*

(2) 反之, 给了仿射代数簇$Y \subseteq U_0 \cong \mathbb{A}^n$, 则存在唯一的射影代数簇$X$使得$Y = X \cap U_0$.

证明. (1) 设$X = V_p(F_1, \cdots, F_m)$, 其中$P = (F_1, \cdots, F_m)$是一个齐次素理想. 由$X \cap U_0 \neq \emptyset$, 可知$X_0 \notin P$.

令$f_i = F(1, x_1, \cdots, x_n)$. 则$Y = V(f_1, \cdots, f_n)$. 易证$(f_1, \cdots, f_n) \subset k[x_1, \cdots, x_n]$是一个素理想.

容易建立$K(X)$和$K(Y)$之间的自然的一一对应.

(2) 设$Y = V(Q)$其中$Q \in Spec\, k[x_1, \cdots, x_n]$. 令$X = \overline{Y} \subseteq \mathbb{P}^n$, 则$Y = X \cap U_0$是$X$的一个开集. 因为$Y$不可约, 所以$X$ 不可约.

□

思考: (1) 如何定义射影代数簇上的正则函数? $\mathbb{P}^n$上是否存在正则函数?

(2) 如何定义射影代数簇之间的映射?

2.2.5 阅读: $\mathbb{P}^n$的对称性

$\mathbb{P}^n$是齐次空间

$$\mathbb{P}^n = PGL(n+1, k)/PGL(n+1, k)_p,$$

其中$PGL(n+1,k)_p$为$p\in\mathbb{P}^n$的固定子群。

$$PGL(n+1,k)=\mathrm{GL}(n+1,k)/k^*, k^*\hookrightarrow \mathrm{GL}(n+1,k), \lambda\mapsto\begin{pmatrix}\lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda\end{pmatrix}$$

$PGL(n+1,k)$通过如下方式作用在$\mathbb{P}^n$上：

$PGL(n+1,k)\times\mathbb{P}^n\to\mathbb{P}^n, (A,Z)\to AZ, A=(a_{ij})_{(n+1)\times(n+1)}, Z=\begin{pmatrix}Z_0\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix}$ 这种作用称作线性作用, 或者(射影)线性自同构.

此作用是可迁的transitive，即$\forall p_1,p_2\in\mathbb{P}^n$，$\exists g\in PGL(n+1,k)$ s.t. $p_2=g(p_1)$, 给定两个射影超平面H_1,H_2, 也存在一个射影线性作用$H_1=g(H_2)$.

作业: 给定射影直线$\mathbb{P}^1$上的三点P_1,P_2,P_3以及Q_1,Q_2,Q_3, 则存在线性自同构T使得$T(P_i)=Q_i, i=1,2,3$.

2.3 抽象代数簇的定义和态射

目标: 从坐标系中的对象到内蕴定义.

2.3.1 抽象代数簇以及上面的函数

定义2.15. 一个**代数簇**X是指射影代数簇$\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$的一个开集, 已经在$\overline{X}$上定义了有理函数.

设$U \subseteq X$是一个非空开集, 一个函数$f : U \to k$被称作U上的**正则函数**, 如果对任意$x \in U$, 存在x的开邻域V_x以及有理函数φ_x使得$f|_{V_x} = \varphi_x|_{V_x}$. U上的正则函数集合记作$Reg(U)$.

注: X的任意两个非空开集相交并且$K(X)$中的函数由在一个开集上的取值确定, 所以$f \in Reg(U)$**可以唯一地被**$K(X)$**中的元素表达, 从而**$Reg(U) = \{\varphi \in K(X) | \ U \subseteq Dom(\varphi)\}$**.可将**$Reg(U)$**视为**$K(X)$ **的子环.**

取一点$x \in X$, 在x的一个邻域中正则的函数集合记作$\mathcal{R}_x$. 如果$u, v \in \mathcal{R}_x$在x中的某个邻域相等, 则称他们等价, 记作$u \sim v$. 易知$\sim$是一个等价关系, 令$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{R}_x / \sim$, 称作在$x$处**正则函数茎**.

对$x \in X$, 可以定义$\mathcal{O}_{X,x}$, 然后可以发现$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\overline{X},x}$

代数簇上的正则函数$\Gamma(X)$.

利用定义, 我们可以得到:

命题2.19. 设X是代数簇，为射影代数簇$\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$的一个开集. 则

(1) 对$x \in X \cap U_0$, 令$Y = \bar{X} \cap U_0$ (仿射代数簇) 则$\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{\bar{X},x} = \mathcal{O}_{Y,x}$.

(2) 可将$\mathcal{O}_{X,x}$视为$K(X)$的子环, 对于开集$U \subseteq X$, $\Gamma(U) = \cap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$.

命题2.20. 设X是代数簇，为射影代数簇$\overline{X} \subseteq \mathbb{P}^n$的一个开集. 则

*(3) X是**拟紧的(quasi-compact)**, 即X的每个开集是紧的.*

(4) 如果$f \in \Gamma(X)$, 则$V_X(f)$是X的闭集.

证明. (3) 不失一般性, 我们证明X是紧的. 设$X = \overline{X} \setminus V_p(I)$, $X = \bigcup_{t \in T} (U_t = \overline{X} \setminus V_p(I_t))$. 则$\bigcap_t V_p(I_t) = V_p(I)$. 由Neother性质, 存在有限个闭集$\bigcap_{i=1}^{i=r} V_p(I_{t_i}) = V_p(I)$, 从而$X = \bigcup_{i=1}^{i=r} U_{t_i}$.

(4) 设$X = \overline{X} \setminus V_p(I)$, 存在$f$的一组表达方式$F_1/G_1, \cdots, F_r/G_r$使得$X \subseteq \bigcup_t (\overline{X} \setminus V_p(G_t))$. 于是

$$V_X(f) = \bigcup_t (\overline{X} \setminus V_p(G_t)) \bigcap V_p(F_t).$$

□

2.3.2 代数簇之间的映射

定义2.16. 设$X \subseteq \mathbb{P}^n, Y \subseteq \mathbb{P}^m$是代数簇. 如果一个映射$\phi : X \to Y$满足

(a) ϕ是连续映射, 只需要验证闭集的原像是闭集;

(b) 对任何开集$U \subset X$, 如果$\phi(U)$ 包含在Y的开集V中, 则ϕ 诱导k-代数同态$\phi^* : \Gamma(V) \to \Gamma(U)$,这等价于对任意$x \in X$, $\phi^* : \mathcal{O}_{Y,\phi(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$
则称ϕ是一个**态射**. 代数簇X和Y之间的态射集记作$Mor(X, Y)$.

命题2.21. *(1) 态射的复合是态射.*

(2) 开嵌入，闭嵌入都是态射.

定理2.8. *设X, Y是代数簇, Y是仿射代数簇. 那么$Mor(X, Y)$和$Hom_{k-alg}(\Gamma(Y), \Gamma(X))$之间存在一一对应.*

从而, 如果X, Y均为仿射代数簇，那么$Mor(X, Y) = Poly(X, Y)$.

证明. 设$Y = V(Q) \subseteq \mathbb{A}^m$.

按照定义, 给定$\phi : X \to Y \in Mor(X, Y)$, 自然有$\phi^* : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$.

反之, 若有$\eta : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$, 可以定义如下映射

$$\phi_\eta : X \to Y,\ x = (a_1, \cdots, a_n) \mapsto (\phi^* y_1(x), \cdots, \phi^* y_m(x)).$$

可以验证

(1) ϕ_η 连续;

(2) 对任意$x \in X$, $\phi_\eta^* : \mathcal{O}_{Y,\phi_\eta(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$;

(3) $\phi_\eta^* = \eta$.

容易说明以上对应是互逆的. □

定义2.17. 设$X \subseteq \mathbb{P}^n$以及$Y \subseteq \mathbb{P}^m$为两个代数簇. 一个**有理映射**$\phi : X \dashrightarrow Y$由$m+1$个不全为零的有理函数给出

$$\phi = [u_0, u_1, \cdots, u_m], u_i \in K(X).$$

为保证像落在Y中, 自然的对任意$F \in I_p(Y)$, 有$F(u_0, \cdots, u_m) = 0$. 令$X' = \bigcap_i Dom(u_i)$, 所以ϕ在一个开集$U = X' \setminus V_{X'}(u_0, \cdots, u_m)$上定义了一个到$\overline{Y}$的映射.

设$\phi = [u_0, \cdots, u_m] : X \dashrightarrow Y$和$\psi = [v_0, \cdots, v_m] : X \dashrightarrow Y$是两个有理映射, 称它们等价, 如果存在$w \in K(X)$使得$(u_0, u_1, \cdots, u_m) = (wv_0, \cdots, wv_m)$. 我们把等价的双有理映射在其Naive的公共定义域上对应的映射是吻合的, 所以我们可以粘合它们, 等同为一个, 称$[u_0, u_1, \cdots, u_m]$是ϕ的一个表达方式.

定义域$Dom(\phi)$是所有表达方式有定义的最大集合，需要额外注意延拓后的映射需要保证像集落在Y中, 而不是仅仅落在$\overline{Y}$.

作业: 记号如上, 如果有理映射ϕ和ψ在一个非空开集一致, 则$\phi = \psi$.

例2.6. (1) $\phi = [1, t^2, t^3] : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$, 其中$t = X_1/X_0$;

(2) $\phi = [1, X_1/X_0] : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow U_0 \subset \mathbb{P}^1$;

(3) $\phi = [1, y/x] : V(y^2 - x^3) \dashrightarrow \mathbb{P}^1$;

注意: (1) 如果$Y \subseteq V_0 = \{Y_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^m$恰好是仿射代数簇, 则有理映射$\phi = [u_0, \cdot, u_m] : X \dashrightarrow Y$的定义域恰好是$\bigcap_i Dom(u_i/u_0)$.

(2) 有理映射的定义域$Dom(\phi)$是个开集.

(3) 如果有理映射ϕ和ψ在一个非空开集一致, 则$\phi = \psi$.

定理2.9. 一个映射$\phi : X \to Y$是一个态射, 当且仅当, ϕ是有理映射并且定义域$Dom(\phi) = X$.

证明. “$\Leftarrow$” 假设$\phi = [u_0, \cdot, u_m]$. 令$Y'_i = Y \cap \{Y_i \neq 0\}$, $X'_i = \phi^{-1} Y'_i$.

依次验证:

(1) X'_i是开集. 因为X仿紧, 存在有限多个表达式

$$\phi = [F_{0,t}/G_{0,t}, \cdots, F_{m,t}/G_{m,t}],\ t = 1, 2, \cdots, r$$

使得$X=\bigcup_t(X''_t=X\setminus V_p(G_{0,t}\cdots G_{m,t})\setminus V_p(F_{0,t},\cdots,F_{m,t}))$. $X'_i=\bigcup_t(X''_t\cap X'_i=X''_t\setminus V_p(F_{i,t}))$.

(2) $\phi|_{X'_i}:X'_i\to Y'_i$是连续映射, 从而$\phi$连续. 以$\phi|_{X'_0}=[1,v_1,\cdots,v_m]:X'_0\to Y'_0$为例. 注意到$Y'_i$上的闭集形如$V_{Y'_i}(g_1,\cdots,g_r),g_i(y_1,\cdots,y_m)\in k[y_1,\cdots,y_m]$, 可以看出$\phi^{-1}V_{Y'_0}(g_1,\cdots,g_r)=V_{X'_0}(\phi^*g_1=g_1(v_1,\cdots,v_m),\cdots,\phi^*g_r)$ 是X'_0的闭集.

(3) 对任意$x\in X$, $\phi^*:\mathcal{O}_{Y,\phi(x)}\to\mathcal{O}_{X,x}$. 任取$\varphi\in\mathcal{O}_{Y,\phi(x)}$, 可以表示为$\varphi=F/G$其中$G(\phi(x))\neq 0$. 另外$\phi$在$x$附近可以表达为$\phi=[u_0,\cdot,u_m]$，其中$u_i(x)$有定义, 而且不全为零. 可以看出$\phi^*\varphi=F(u_0,\cdot,u_m)/G(u_0,\cdot,u_m)\in K(X)$，并且在$x$有定义.

"$\Rightarrow$" 通过取Y的闭包, 可以假设$Y\subseteq\mathbb{P}^m$是射影代数簇. 不妨设Y'_0非空, 从而是一个仿射代数簇, $\phi^{-1}Y_0\subset X$是一个开集. 由态射的条件, 可知$\phi^*y_1,\cdots,\phi^*y_n$是$X'_0$的正则函数, 从而证明$\phi|_{X'_0}=[1,\phi^*y_1,\cdots,\phi^*y_n]$是一个有理映射. 最后由于在$X'_i$之间相交的地方定义的映射一致, 所以在每一片$X'_i$上的表达式是等价的, 从而$\phi$确实是一个有理映射. □

问题:事实上以上给出了代数簇的两种等价定义, 哪一种更自然? 其优势是什么?

定义2.18. 可以定义代数簇的同构, 然后定义同构意义下的仿射代数簇, 射影代数簇等等.

作业: (1) 证明映射$\phi:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2,[X,Y,Z]\mapsto[X^2,Y^2,Z^2]$是一个态射.

(2) $\mathbb{A}^1\setminus\{1,2,3\}$是否是仿射代数簇.

(3) 令$X=\mathbb{A}^2\setminus(0,0)$. 计算$\Gamma(X)$, X是否是一个仿射代数簇.

例2.7. $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}\cong V(xy-1)\subset\mathbb{A}^2$.

命题2.22. *(1) 设X是仿射代数簇, 那么X的每个主开集$D(f)$也是仿射代数簇;*

(2) 仿射开集是代数簇的开集基;

(3) 每个代数簇可以分解为有限多个仿射开集的并集.

证明. (1) 设$X=V(P)\subseteq\mathbb{A}^n,f=\overline{F(x_1,\cdots,x_m)}\in k[x_1,\cdots,x_n]/P$. 构造互逆态射

$$\phi=(x_1,\cdots,x_n,\frac{1}{F}):D(f)\to Y=V(P,yF-1)\subseteq\mathbb{A}^{n+1},x\mapsto(x,\frac{1}{f(x)})$$

和

$$\psi = (x_1, \cdots, x_n) : Y = V(P, yF-1) \to D(f), (x_1, \cdots, x_n, y) \mapsto (x_1, \cdots, x_n).$$

(2) 事实上只需要证明每个代数簇X上的一个点x在X中有一个仿射开邻域即可. 设$X \subseteq \mathbb{P}^n$，不妨设$x \in U_0$. 注意$Y = \bar{X} \cap U_0$ 是一个仿射代数簇, $X_0' = X \cap U_0 = Y \setminus V(I)$是$Y$的开子集. 存在$f \in I$使得$f(x) \neq 0$, 故而$x \in D_Y(f)$, 而$D_Y(f) = Y \setminus V(f) \subseteq Y \setminus V(I) = X$.

(3) 仿紧性. □

定义2.19. 如果有理映射$\phi : X \dashrightarrow Y$是可逆的, 即存在逆映射$\psi : Y \dashrightarrow X$, 则称$\phi : X \dashrightarrow Y$是**双有理映射**, X 和Y**双有理等价**.

定理2.10. *代数簇X和Y双有理等价*

(1) 当且仅当存在X, Y的非空开集$U \cong V$;

(2) 当且仅当有k-代数同构$K(X) \cong K(Y)$.

证明. (1) 一个方向"⇒"是容易的. 现在证明反方向. 假设$\phi : X \dashrightarrow Y$和$\psi : Y \dashrightarrow X$是互逆的双有利映射, 找非空开集非空开集$\phi : U \cong V$. 取非空开集令$U_1 \subseteq Dom(\phi), V_1 \subseteq Dom(\psi)$. 令$U = U_1 \cap \phi^{-1}V_1, V = V_1 \cap \psi^{-1}U_1$. 验证: $\phi(U) \subseteq V, \psi(V) \subseteq U$, 进而证明$U \cong V$.

(2) 一个方向"⇒"是容易的. 现在证明反方向. 不失一般性假设$X \subseteq \mathbb{A}^n, Y \subseteq \mathbb{A}^m$是仿射代数簇，并假设有$k$-代数同构$\eta : K(Y) \to K(X)$. 于是$\eta(y_1), \cdots, \eta(y_m) \in K(X)$. 设$U \subseteq X$是这些函数的公共定义域. 可以定义有理映射

$$\phi := (\eta(y_1), \cdots, \eta(y_n)) : U \dashrightarrow \mathbb{A}^m$$

并可以验证$\phi(U) \subseteq Y$, 满足$\eta = \phi^*$, 后者是因为$K(Y) = k(y_1, \cdots, y_n)$，$k$代数同态由生成元唯一确定. 类似方法可以由$\eta^{-1}$构造态射$\psi : Y \dashrightarrow X$. 容易验证这两个有理映射互逆. □

例2.8. $X = V(x^2 + y^2 + z^2 + 1) \subseteq \mathbb{A}^3$ 和$Y = \mathbb{A}^2$ 双有理等价, 请具体写一个同构$K(X) \cong K(Y)$.

$X = V(x^3 + y^3 + z^3 + 1) \subseteq \mathbb{A}^3$ 和$Y = \mathbb{A}^2$双有理等价(在X上找两条直线).

$X = V(x^4 + y^4 + z^4 + 1) \subseteq \mathbb{A}^3$ 和$Y = \mathbb{A}^2$不双有理等价(双有理几何).

$X = V(x^3+y^3+z^3+w^3+1) \subseteq \mathbb{A}^4$ 和$Y = \mathbb{A}^3$是否双有理等价?(Hodge theory, Intermediate Jacobian, Clemens-Griffiths criterion (72)).

2.3.3 如果真正摆脱坐标来定义代数簇?

如何描述一个态射以及验证一个映射一个态射?

仿射代数簇可以由其正则函数通过极大理想重构出来，仿射簇之间的态射由其正则函数环的同态确定，仿射开集是代数簇的开集基. 所以描述以及定义一个态射, 我们可以在仿射开集上定义即可，但是需要在相交的地方满足相容性关系.

设X, Y是代数簇, $\phi : X \to Y$是一个映射. 那么ϕ是一个态射, 当且仅当存在Y的有限仿射开覆盖$\{V_1, \cdots, V_l\}$, 以及对每个V_i, $\phi^{-1}V_i$是一个开集, 而且有一个仿射开覆盖$\{U_{i1}, \cdots, U_{ik_i}\}$使得$\phi|_{U_{ij}} \in Mor(U_{ij}, V_i)$.

如何类比流形的定义, 通过粘合构造代数簇?

设$X = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_r$，其中每个$U_i$是一个仿射代数簇, 并且$U_{ij} = U_i \cap U_j$继承的$U_i, U_j$上代数簇的结构是一致(同构)的.

注意: 这种方式定义的对象称作抽象代数簇，它不一定能实现为射影簇的开集; 射影簇的开集有时候被称作拟射影簇(quasi-projective variety).

2.3.4 思考

在$\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$上定义乘积拓扑, 是否同构于$\mathbb{A}^2$?

在$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$定义闭集，一个闭集形如$V_p(F_1(X_0, \cdots, X_n; Y_0, \cdots, Y_m), F_2, \cdots, F_r)$, 其中每个$F_i(X_0, \cdots, X_n; Y_0, \cdots, Y_m)$是双齐次多项式, 例如$F = X_1^2 Y_0 + X_0 X_2 Y_1$.

依次验证:

(1) 可以用上述方式定义闭集，从而定义拓扑;

(2) 令$U_i = \{X_i \neq 0\} \cong \mathbb{A}^n \subset \mathbb{P}^n$, $V_j = \{Y_j \neq 0\} \cong \mathbb{A}^m \subset \mathbb{P}^m$. 在$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$定义闭集使得在$U_i \times V_j$上诱导的拓扑和$\mathbb{A}^{n+m}$上的Zariski拓扑一致. 上述方式定义的拓扑在$U_i \times V_j$上诱导的拓扑和$\mathbb{A}^{n+m}$上的Zariski拓扑一致.

(3) 考虑Segre嵌入$\iota : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$,

$$[X_0, \cdots, X_n] \times [Y_0, \cdots, Y_m] \mapsto [Z_{ij} = X_i Y_j, i = 0, 1, \cdots, n; j = 0, 1, \cdots, m]$$

说明ι是单射, 而且$Im(\iota)$是一个闭集.

(4) 说明$\iota : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \to Im(\iota)$建立了闭集之间的一一对应, 从而$Im(\iota)$是不可约的, 故而是射影代数簇.

(5) 类比流形的定义, 通过粘合构造$\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$的代数簇结构, 并说明这个代数簇同构于$Im(\iota)$.

2.3.5 自学: 模的局部化

定义: 设M是R-模, $S \subset R$是乘性子集, M关于S的局部化定义为

$$S^{-1}M = R \times M/\sim,\ (x_1, s_1) \sim (x_2, s_2) \Leftrightarrow \exists s \in S,\ s(x_1 s_2 - x_2 s_1).$$

然后$S^{-1}R \times S^{-1}M \to S^{-1}M, (\frac{r}{s}, \frac{x}{s'}) \mapsto \frac{rx}{ss'}$赋予$S^{-1}M$一个$S^{-1}R$的结构.

由构造过程可知存在自然的R-模同态$\iota : M \to S^{-1}M$.

定理(泛性质): 记号如上. 设N是$S^{-1}R$模, $\psi : M \to N$是R-模同态. 那么存在唯一的延拓: $\tilde{\psi} : S^{-1}M \to N$.

Proof. 作业.

定理: $S^{-1}M \cong M \otimes_R S^{-1}R$.

Proof. 局部化的泛性质给出$\phi : S^{-1}M \to M \otimes_R S^{-1}R, \frac{x}{s} \to x \otimes \frac{1}{s}$. 另一方面双线性映射$\Psi : M \times S^{-1}R \to S^{-1}M$, 诱导$\psi : M \otimes_R S^{-1}R \to S^{-1}M$.

命题: S^{-1}是左正合函子(从而正合): 给定正合列$0 \to M' \to M$, 我们有$0 \to S^{-1}M' \to S^{-1}M$.

Proof. 用定义验证.

命题: (1) $S^{-1}R$为平坦R-模; (2) $S^{-1}(M \bigoplus N) \cong S^{-1}M \bigoplus S^{-1}N$; (3) $S^{-1}(M \otimes_R N) \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N$.

Proof. (3) 回顾:设$R \to S$, M是R-模, N是S- 模, 那么$M_S \otimes_S N \cong M \otimes_R N$.

$$S^{-1}(M \otimes_R N) \cong S^{-1}R \otimes_R (M \otimes_R N) \cong (S^{-1}R \otimes_R M) \otimes_R N \cong S^{-1}M \otimes_R N \cong S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N.$$

局部化的几何意义: 局部化对应于把模限制在一个开集上.

(1) $\mathbb{Z}$-模$M = \mathbb{Z}/(60)$, $S_1 = \{1, 2, 2^2, \cdots\}$, $S_2 = \{1, 7, 7^2, \cdots\}$, 考虑$S^{-1}M$以及$M \otimes \mathbb{Z}/(2^2)$.

(2) 考虑$R = k[x, y]$-模$M = k[x, y]/(xy, x(x-1))$. 则

$$k[x, y]_x \otimes_R M \cong k[x, y]/(y, (x-1));\ k[x, y]/(x) \otimes_R M \cong k[x, y]/(x)$$

命题: 设M是R-模, TFAE:

(1) $M = 0$; (2) $M_P = 0, \forall P \in \operatorname{Spec}(R)$; (3) $M_m = 0, \forall m \in \operatorname{Max}(R)$.

Proof. (3) $\Rightarrow$ (1). 否则, 可取$x \in M$, $x \neq 0$, $\operatorname{Ann}(x) \subsetneq R$. 存在$m \in \operatorname{Max}(R)$, 使得$\operatorname{Ann}(x) \subseteq m$. 令$S = R \setminus m$, 则$x \neq 0 \in S^{-1}M$.

引理: 设J是环R的Jacobson根理想(所有极大理想的交). 则

(1) 设$a \in R$, $a \in J$当且仅当$1 + (a) \subseteq R^{\times}$.

(2)(Nakayama 引理) 设M是有限生成R-模. 如果$JM = M$, 则$M = 0$.

命题(作业). 设(R, m)是局部环.

(1) 如果M是有限生成R-模且$M \otimes_R (R/m) = 0$, 那么$M = 0$ (提示: 用Nakayama Lemma).

(2) 设$f: M \to N$是有限生成R-模同态. 如果f诱导满同态$M \otimes_R R/m \to M \otimes_R R/m$, 则$f$是满同态. (提示: 考虑coker, 用Nakayama Lemma).

2.4 代数簇的维数

定义-命题2.2. 设K/k是一个有限生成域. 则

(1) 存在$x_1, \cdots, x_r \in K$使得$k(x_1, \cdots, x_r)/k$是纯超越扩张, $K/k(x_1, \cdots, x_r)$是代数扩张, 称$x_1, \cdots, x_r$是一组**超越基**.

(2) 证明r不依赖于$x_1, \cdots, x_r$的选取, 称作K/k的**超越次数**, 记作$tr.\deg_k K$, $x_1, \cdots, x_r$称作一组**超越基**.

证明. 引理：若$F(T_1, \cdots, T_n) \in k[T_1, \cdots, T_n]$是不可约多项式, 而且$T_n$出现在$F$中. 若$F(x_1, \cdots, x_n) = 0$, 则$x_n$是$k((x_1, \cdots, x_{n-1})$上的代数元. 反之，也成立.

(1) 设$K = k(x_1, \cdots, x_n)$, 通过代数相关性添加代数无关元.

(2) 给两组超越基, 通过逐次替换来证明元素个数相等, 细节留作作业. □

定义2.20. 设X是代数簇, 定义$\dim X = tr.\deg_k K(X)$.

例2.9. $\dim \mathbb{A}^n = n$, 一个不可约超曲面的维数$\dim V(F) = n - 1$ (设$F = a_m(x_1, \cdots, x_{n-1})x_n^m + \cdots + a_0(x_1, \cdots, x_{n-1})$, $a_m \neq 0$, 另外$x_1, \cdots, x_{n-1}$代数无关).

推论2.2. *设$char\ k = 0$, n维代数簇双有理等价于$\mathbb{A}^{n+1}$中的一个超曲面. (未来会证明任意特征上一条代数曲线双有理等价于一个平面曲线.)*

证明. 设X是代数簇, $n = \dim X = tr.\deg_k K(X)$. 则存在代数无关的元素$x_1, \cdots, x_n \in K(X)$使得$K(X)/k(x_1, \cdots, x_n)$是有限扩张，由于char $k = 0$，此扩张必为可分扩张, 从而是单扩张. 设

$$K(X) \cong k(x_1, \cdots, x_n)[y]/f(x_1, \cdots, x_n, y)$$

可以假设$f(x_1, \cdots, x_n, y) \in k[x_1, \cdots, x_n, y]$是不可约的. 令$Y = V(f) \subset \mathbb{A}^{n+1}$. 从而$\Gamma(Y) = k[x_1, \cdots, x_n, y]/(f)$, $K(Y) = k(x_1, \cdots, x_n)[y]/f(x_1, \cdots, x_n, y) \cong K(X)$. □

命题2.23. *(1) 对于开集$U \subseteq X$, $\dim U = \dim X$.*

(2) 对于不可约闭集$Z \subseteq X$, 则$\dim Z \leq \dim X$, 等号取到当且仅当$Z = X$.

证明. (1) 根据定义.

(2) 可设$Z \subseteq X \subseteq \mathbb{A}^N$是仿射代数簇. 设$T_1, \cdots, T_N$为$\mathbb{A}^N$的坐标. 易知，$K(Z) = k(T_1, \cdots, T_N), K(X) = k(T_1, \cdots, T_N)$ (此处滥用记号把T_i当作X, Z上的函数), 而且如果$T_{i_1}, \cdots, T_{i_n}$在Z上代数无关, 则它们在X上也代数无关. 所以，$\dim Z \leq \dim X$.

现在假设$\dim Z = \dim X = n$, 需证明$Z = X$. 否则存在$0 \neq f \in \Gamma(X)$，使得$Z \subseteq V_X(f)$.不妨设$T_1, \cdots, T_n \in \Gamma(Z)$上代数无关，所以作为函数是$K(X)$的超越基，从而则$f$满足一个多项式(不可约)

$$a_m(T_1, \cdots, T_n)y^m + \cdots + a_0(T_1, \cdots, T_n) = 0$$

所以当$f = 0$时, 从而在Z上, 我们由$a_0(T_1, \cdots, T_n) = 0$. 这和$T_1, \cdots, T_n$在$Z$上代数无关矛盾. □

命题2.24. *设X是代数簇.*

(1) $\dim X = 0$ 等价于$X = \{pt\}$.

(2) 设$X = V(I) \subseteq \mathbb{A}^2$, 并且$\dim X = 1$, 则$I = (f(x, y))$.

(3) 每个1维代数簇双有理等价于一个平面曲线.

证明. (1) 因为k是代数闭域.

(2) 作业: 设$I \leq k[x, y]$是素理想. 如果I不是主理想, 则

(2.1) I至少包含两个互素的多项式$f(x, y), g(x, y)$;

(2.2) $V(f, g)$至多包含有限多个点.

于是$\dim X = 0$.

(3) 我们只需处理char $k = p$ 的情形. 设$L = K(X)$, 取代数自由元$x \in K(X)$. 则L是$k(x)$的有限代数扩张. 设K是$k(x)$在L中的可分代数闭包, 则$K = k(x, z) \cong k(x)[z]/(f(x, z))$. 如果$K = L$, 则已经完成. 否则应用如下引理.

引理: 如果L/K是有限纯不可分扩张, 那么存在p-次纯不可分扩张列

$$K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r = L, \ K_i = K_{i-1}(\alpha_i),$$

其中$\alpha_i^p = a_{i-1} \in K_{i-1}$.

可以证明$K_1 = k(x^{\frac{1}{p}}, z^{\frac{1}{p}})$ (证明$[k(x^{\frac{1}{p}}, z^{\frac{1}{p}}) : K_0] = p$), 进而归纳证明证明$L = k(x^{\frac{1}{p^r}}, z^{\frac{1}{p^r}})$.

事实上我们证明了存在$x' \in K$使得$K/k(x')$是可分扩张. □

2.4.1 阅读: Krull 维数

定义2.21. 设X是一个拓扑空间, 考虑以下不可约闭子集的严格递降链

$$X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_r$$

定义X的组合维数为以上链的最大长度.

设A是Noether环, 定义其Krull维数为$SpecA$的组合维数, 对应于素理想链的最大长度.

Atiyah-Macedonald: 交换代数导引, Chap 10.

2.5 光滑点和奇异点

2.5.1 光滑性

对一个仿射代数簇$X = V(P = (f_1, \cdots, f_m)) \subseteq \mathbb{A}^n$, 经典的切空间

$$T_x := \{v \in k^n | J_x \cdot v = 0\}.$$

内蕴定义如下:

定理2.11. *设$x \in X$, $(\mathcal{O}_{X,x}, m_{X,x})$是局部环, 则存在$k$-线性同构$T_x^* \cong m_{X,x}/m_{X,x}^2$. (也就是在同构意义下可以定义切空间, 余切空间)*

证明. 存在自然同构$T_x^* \cong (k^n)^*/Span_k J_x$. 只需证明存在自然同构

$$m_{X,x}/m_{X,x}^2 \cong (k^n)^*/Span_k J_x$$

前者只和环的结构有关.

不妨设$x = (0, 0, \cdots, 0)$, 记$m_x = (x_1, \cdots, x_n)$. 可设$f_i := l_i + h_i$ 其中l_i是线性函数, $h_i \in n_x^2$, 此时$Span_k J_x = Span_k\{l_1, \cdots, l_m\}$.

$$\frac{m_{X,x}}{m_{X,x}^2} = S^{-1}\frac{m_x + P}{m_x^2 + P} \cong \frac{m_x + P}{m_x^2 + P} \cong \frac{m_x/m_x^2}{(m_x^2 + P)/m_x^2} \cong \frac{Span_k\{x_1, \cdots, x_n\}}{Span_k\{l_1, \cdots, l_m\}}.$$

此处$\frac{m_{X,x}}{m_{X,x}^2}$视为$\frac{\mathcal{O}_{X,x}}{m_{X,x}} \cong k$-模, 进而做局部化时$S$的效果同于

$$\bar{S} = k^\times \subset \frac{\mathcal{O}_{X,x}}{m_{X,x}} \cong k.$$

□

定义2.22. 设$x \in X$, 如果$\dim_k m_{X,x}/m_{X,x}^2 = \dim X$, 称$x$是一个**光滑点**, 否则称作**奇异点**. (不依赖于嵌入, 所以可以固定一个嵌入, 用Jacobi判别法)

例2.10. $V(y^2 - x^3)$的光滑点和奇异点.

命题2.25. *设X是代数簇, $x \in X$. 则$\dim_k m_{X,x}/m_{X,x}^2 \geq \dim X$.*

证明. 没有想出初等的证明, 请参考完整的维数理论.

以下是一个常识.

不妨设$X \subseteq \mathbb{A}^n$是仿射闭子簇, $x = (0, \cdots, 0)$. 假设$I(X) = (f_1, \cdots, f_m)$, 并且假设$rank J_x = r$, J_x由$f_1, \cdots, f_r$的线性部分生成.

接下来证明$\dim X \leq n - r$.

令Z_1是$V(f_1)$的包含原点的不可约分支, 所以是一个代数簇; Z_2是$V(f_1, f_2)$的包含原点的不可约分支; 以此类推定义$Z_3, \cdots, Z_r$.

引理: 设代数簇X在点x处光滑, $f \in m_{X,x} \setminus m_{X,x}^2$. 则$V_X(f)$有唯一的不可约分支$Z$包含$x$, 且$Z$在$x$点光滑, $m_{Z,x} = m_{X,x}/(f)$.

□

定理2.12. *设X是不可约仿射超曲面. 则X的光滑点集X^{sm}是一个非空开集.*

证明. 设$X = V(F(x_1, \cdots, x_n))$, 其中$F$不可约. 首先易证奇异点构成闭集, 然后证明至少一个偏导数不等于零从而不被F整除, 这意味着奇异点构成真子集. □

2.5.2 曲线的奇点和光滑性

定理2.13. *设X是仿射代数曲线, 令$A = \Gamma(X)$. 则A的非平凡素理想是极大理想.*

证明. 反证法. 假设A有素理想链$0 \subset P \subset Q$. 由于A是曲线的函数环, 取$u \in P \setminus \{0\}$, 则$K(X)/ku)$是有限扩张.

然后取$v \in Q \setminus P$, 则存在不可约多项式$f(x, y)$使得$f(u, v) = 0$. 可以证明

(i) $f = xg(x, y) + h(y)$, 其中$h(y) \neq 0$.

(ii) 于是$g(v) = b_m v^m + \cdots + b_0 = b_m(v - c_1) \cdots (v - c_m) \in P$.

由P是素理想，我们得到矛盾. □

定义2.23. 设R是整环, R在$K(R)$中的整闭包R^ν称作R的**正规化**(normalization). 如果$R = R^\nu$, 则称R是正规的.

$$R = k[u, v]/(u^2 - v^3) \cong k[x^2, x^3], (k[x^2, x^3])^\nu = k[x].$$

定理2.14. *设k是代数闭域, R是有限生成k-代数而且是整环. 那么R^ν/R 是有限扩张.*

证明. 如果$\mathrm{char}\ k = 0$ 或者$tr.\deg K(R) = 1$, 可以利用下一节的结论证明. 对于特征p的情形, 事实上只需要假设k是代数闭域结论就成立. $\square$

定义2.24. 设R是整环, 如果存在赋值$v : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$使得$R = \{v \geq 0\}$, 满足: (1) $v(1) = 0$; (2) $v(r_1 r_2) = v(r_1) + v(r_2)$; (3) $v(r_1 + r_2) \geq \max\{v(r_1), v(r_2)\}$; (4) 存在$x \in K$使得$v(x) = 1$, 则称$R$是**离散赋值环**(DVR).

易知: R是局部环, $m = \{r | v(r) > 0\}$是R的极大理想, 而且R是PID.

回顾:

引理: 设J是环R的Jacobson根理想(所有极大理想的交). 则

(1) 设$a \in R$, $a \in J$当且仅当$1 + (a) \subseteq R^\times$.

(2)(Nakayama 引理) 设M是有限生成R-模. 如果$JM = M$, 则$M = 0$.

命题. 设(R, m)是局部环.

(1) 如果M是有限生成R-模且$M \otimes_R (R/m) = 0$, 那么$M = 0$ (提示: 用Nakayama Lemma).

(2) 设$f : M \to N$是有限生成R-模同态. 如果f诱导满同态$M \otimes_R R/m \to M \otimes_R R/m$, 则$f$是满同态. (提示: 考虑coker, 用Nakayama Lemma).回顾:

定理2.15. *设X是代数曲线, 设点$P \in X$. 则以下条件等价*

(1) P是光滑点;

(2) $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$是DVR;

(3) $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$是正规的, 此时称$P$是正规点.

证明. (2) $\Rightarrow$ (1, 3) 显然.

(1) $\Rightarrow$ (2) 由条件可以假设$m_{X,P}/m_{X,P}^2 = span_k(\bar{u})$其中$u \in \mathcal{O}_P$并且$u(P) = 0$. 利用Nakayama引理, $m_{X,P} = (u)$, 从而$m_{X,P}^r = (u^r)$.

断言: $J = \bigcap_r m_{X,P}^r = (0)$. (验证$m_{X,P} J = J$.)

现在在$\mathcal{O}_P$ 上定义赋值. 任取$0 \neq f \in \mathcal{O}_P$, 存在$r$使得$f \in m_{X,P}^r \setminus m_{X,P}^{r+1}$, 于是$f = \epsilon u^r$, 其中$\epsilon(P) \neq 0$, 定义赋值$v_P(f) = r$.

(3) $\Rightarrow$ (1). 只需证明$\dim_k m_{X,P}/m_{X,P}^2 = 1$. 否则取$u, v \in m_{X,P}$使得$\bar{u}, \bar{v}$在$m_{X,P}/m_{X,P}^2$中线性无关. 此时, 存在不可约多项式$f(x,y)$ 使得$f(u,v) = 0$. 可以记

$$f(u,v) = f_d(u,v) + f_{d+1} + \cdots = 0$$

其中$f_d \neq 0$.

如果$d = 1$, 比如$f \equiv u + av \, mod \, m_{X,P}^2$, 则得到矛盾.

否则, 可以做一个线性变换, 使得$f = u^d + \cdots + f_{d+1} + \cdots$, 从而

$$f/v^d = (1 + c(u,v))(u/v)^d + \cdots = 0$$

根据正规性, 可以$u/v \in \mathcal{O}_{X,P}$. □

注: 整环R是正规环当且仅当其在每个极大理想的局部化是正规的; 所以对于代数曲线, 我们只要做一个正规化的代数操作就可以得到光滑曲线.

定理2.16. 设X是光滑代数曲线, $\varphi : X \to \mathbb{P}^n$是一个有理映射, 则$\varphi$是一个态射.

证明. 设$\varphi = [f_0, \cdots, f_n]$. 任取$P \in X$, 不妨假设

$$v_P(f_0) = \min\{v_P(f_0), \cdots, v_P(f_n)\}.$$

于是发现$\varphi = [1, f_1/f_0 \cdots, f_n/f_0]$在$P$点有定义. □

2.5.3 正规环和正规化

定义: 设R是S的子环.

(1) 记R'是S中在R上整的元素集合, 已经证明R'是一个环, 称作R在S中的**整闭包**; 若$R = R'$, 则称R 在S 中**整闭**(integrally closed).

(2) 如果R是整环, R在$K(R)$中的整闭包R^ν称作R的**正规化**(normalization).

命题: 唯一因子分解整环是正规的.

Proof. 设R是UFD. 反证法. 如果$u/v \in K(R)$在R上整, 但是$u/v \notin R$, 不妨设$gcd(u,v) \sim 1$. 已知存在$a_0, \cdots, a_{n-1} \in R$使得

$$(\frac{u}{v})^n + a_{n-1}(\frac{u}{v})^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

通分后得到矛盾.

例子: $\mathbb{Z}$, $k[x]$正规; $(k[x^2, x^3])^\nu = k[x]$.

定理(正规是局部性质): 设R是整环, S是其乘性子集.

(1) 证明如果R是正规的, 那么$S^{-1}R$也是正规的;

(2) 如果对任意极大理想m, R_m是正规的, 那么R也是正规的.

定理2.17. *设$char\ k = 0$, R是有限生成k-代数而且是整环, 那么R^ν/R 是有限扩张.*

证明. 需要诺特正规化定理. 由诺特正规化定理, 可设$R/k[y_1, \cdots, y_r]$是有限扩张. 则$K(R)/K(y_1, \cdots, y_r)$是有限扩张, 可以验证R^ν恰好是$k[y_1, \cdots, y_r]$在$K(R)$中的整闭包, 于是R^ν包含在有限生成$k[y_1, \cdots, y_r]$-模中(这步极难, 以下定理), 所以是有限生成$k[y_1, \cdots, y_r]$-模, 从而也是有限生成R-模. □

Rmk: 结论对特征p的域也成立, 证明需要引入纯不可分域扩张的概念, 有限域扩张可以分解为可分扩张和纯不可分扩张的复合, p-次纯不可分扩张形如$K[x]/(x^p - a)$.

定理: 设R是**正规整环**, $K = K(R)$, L/K是有限**可分**域扩张. 则R在L中的整闭包S是秩为$[L : K]$的自由模的子模.

Rmk: 如果R是Noether的, 那么S是有限生成R-模.

回顾预备知识:设L/K是有限域扩张. 取$u \in L$, 通过乘法对应一个L上的一个K线性变换线性变换A_u (可逆). 于是定义$\mathrm{Tr}_{L/K}(u) = \mathrm{Trace}(A_u)$, $N_{L/K}(u) = \det(A_u)$. 可以取定L的一组基$v_1, \cdots, v_n$, 计算矩阵的trace、norm.

命题: 设L/K是有限Galois扩张. 那么对$u \in L$我们有$Tr_{L/K}(u) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(u)$以及$N_{L/K}(u) = \prod_{\sigma \in G} \sigma(u)$.

如果$u_1, \cdots, u_t$为u的共轭元, 我们有$Tr_{L/K}(u) = (\sum_i u_i) \cdot \frac{[L:K]}{t}$.

命题: 如果L/K可分, 那么$Tr_{L/K}(xy)$定义了L上的非退化K-双线性型.

Proof. 首先证明如下

引理: 设R是整环, $K = K(R) \subset L$是可分代数扩张, 设$\alpha \in L$在R上整, 记α在K上的极小多项式为$f(x) = x^m + c_{m-1}x^{m-1} + \cdots + c_0$(和$R$满足的多项式未必一致). 则$c_i$ 在R上整.

引理证明: 只需注意到以下事实

(1) 记$\alpha_1, \cdots, \alpha_t$为$\alpha$的在代数闭包中的共轭元, 则$\alpha_i$在$R$上整;

(2) c_i可以表示成α的共轭元的对称多项式.

回到定理证明: 取L/K的一组基$u_1, \cdots, u_n$, 通过乘上R中的元素, 还可以假设$u_1, \cdots, u_n$在R上整. 根据以上命题, 可取$v_1, \cdots, v_n$使得$Tr_{L/K}(u_i v_j) = \delta_{ij}$.

断言: $S \subset \bigoplus_i R \cdot v_i$.

任取$s \in S$, 则$su_i \in S$, 由引理可知$b_i = Tr_{L/K}(u_i s) \in K$在$R$上整, 再由$R$是正规的, 得$b_i \in R$. 从而$s = \sum_i b_i v_i \in \bigoplus_i R \cdot v_i$.

例子: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\frac{\sqrt{2}}{2}] \cong \mathbb{Z}[x]/(2x^2 - 1)$中的整闭包.

3 层(sheaf)和概型(scheme)

3.1 层

3.1.1 层的定义

定义3.1. 设X是一个拓扑空间, 记$\mathcal{S}$为X的所有开集的范畴, 一个Abel群(集合, 环)**预层**(presheaf)$\mathcal{F}$是一个函子

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}^{op} \to \mathcal{A},\ U \mapsto \mathcal{F}(U)$$

也就是:

(a) 对每个开集U, $\mathcal{F}(U)$是一个Abel群; (b) 对$V \subseteq U$, 有一个限制映射, 这是群同态$r_{U,V} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, 满足如下条件:

(0) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$; (1) $r_{U,U} = id$; (2) $W \subseteq V \subseteq U$, $r_{U,W} = r_{V,W} \circ r_{U,V}$.

称$s \in \mathcal{F}(U)$是$\mathcal{F}$在U上的一个**截面**(section), 限制到子集V上记作$s|_V$.

对$x \in X$, 令$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$, 称作$\mathcal{F}$在$x$处的**茎**(stalk), 元素用代表元表示, 记作$[S_U]$ 或者$\bar{s}_U$.

对$s \in \mathcal{F}(U)$, 令s_x为s在$\mathcal{F}_x$中的像.

如果预层$\mathcal{F}$满足: 如果有开覆盖$U = \cup_i V_i$以及V_i上的截面s_i使得$s_i|_{V_{ij}} = s_j|_{V_{ij}}$, 则存在唯一的$s \in \mathcal{F}(U)$使得$s|_{V_i} = s_i$, 也就是以下序列正合

$$0 \to \mathcal{F}(U) \to \prod_i \mathcal{F}(V_i) \to \prod_{ij} \mathcal{F}(V_{ij})$$

则称$\mathcal{F}$是**层**.

设$\mathcal{F}$是X上层, 其全体截面记作$\Gamma(X, \mathcal{F})$, 元素叫作**整体截面**.

子层, 子预层.

命题3.1. *(1) $\mathcal{F}_x$中的元素由$s_U \in \mathcal{F}(U)$表达, 记作$\bar{s}_U$.*

(2) $\bar{s}_U = 0$当且仅当存在x的邻域$V \subseteq U$使得$s_U|_V = 0$.

(3) 给定$s \in \mathcal{F}(U)$, 则$\{x \in U | s_x = 0\}$是一个开集; $s = 0 \Leftrightarrow \forall x \in U,\ s_x = 0$.

例3.1. 设$X=(0,1)$, 对开集$U\subseteq X$, 令$\mathcal{C}^\infty(U)$为U上光滑函数集合. 则$\mathcal{C}^\infty$ 是一个层.

设$X=(0,1)$, 对开集$U\subseteq X$, 令$\mathcal{L}^1(U)$为U上绝对可积函数集合. 则$\mathcal{L}^1$是一个层吗?

设X是一个微分流形, 对开集$U\subseteq X$, 令$\Omega_X(U)$为U上光滑微分形式, 则Ω_X是一个层; $\mathcal{B}^1_X(U)$为U上恰当光滑微分形式. 则$\mathcal{B}^1_X$ 是一个预层; $\mathcal{Z}^1_X(U)$为U上闭光滑微分形式. 则$\mathcal{Z}^1_X$ 是一个层.

设X是一个拓扑空间, 对开集$U\subseteq X$, 令$\mathbb{C}_X(U)=\bigoplus_{U_i}\mathbb{C}$ 其中U_i是U的连通分支. 则$\mathbb{C}_X$是一个层.

设X是代数簇, 对开集$U\subseteq X$, 令$\mathcal{O}_X(U)$为U上正则函数集合, 则$\mathcal{O}_X$是一个层, $\mathcal{O}_x$.

定义3.2. 设$\mathcal{F},\mathcal{G}$是X上的两个预层, 预层的**同态**$\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$由在所有开集上的群同态定义

$$\eta_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$$

这些群同态和限制映射是交换的.

如果对每个开集U, $\eta_U:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$是单射, 则称$\eta$是**单同态**. 类似定义定义**同构**.

命题(作业): 对层的**同态**$\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$, 定义预层$ker(\eta):U\mapsto ker(\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$. 则$ker(\eta)$是一个层.

思考: 如何定义满同态? 如何定义$Im(\eta)$? 注意预层$\eta(\mathcal{F}):U\mapsto Im(\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U))$不是一个层.

命题3.2. *设$\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是层的同态.*

(1) η是单同态$\Leftrightarrow$ 对任意$x\in X$, $\eta_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$是单同态.

(2) η是单同态$\Leftrightarrow$ $ker(\eta)=0$.

(3) $\eta(\mathcal{F})_x=\eta(\mathcal{F}_x)\subseteq\mathcal{G}_x$.

证明. (2) $\Rightarrow$ 直接验证; $\Leftarrow$ 若$s\in ker(\mathcal{F}(U)\to\mathcal{G}(U)$, 则由于$x\in X$, η_x单, 所以$s_x=0$ $\forall x\in U$, 从而$s=0$.

(2) 利用(1).

(3) 前者$[\eta(s_U)]$, 后者$\eta([s_U])$. $\square$

例3.2. $d:\mathcal{C}^\infty_X\to\Omega_X$.

如果$X=\mathbb{R}$, 则对任意U, $d:\mathcal{C}^\infty_X(U)\to\Omega_X(U)$是满射.

如果$X=S^1$, 则对任意$U\neq X$, $d:\mathcal{C}^\infty_X(U)\to\Omega_X(U)$是满射, 但是$d:\mathcal{C}^\infty_X(S^1)\to\Omega_X(S^1)$不是.

设$X=\mathbb{R}^2$, 则d不是满射, 如何修正? 令$Z_X\subset\Omega_X$代表局部上是d-closed 1-form. 则在每个点$x\in X$, 对于一个可缩邻域U_x, $\mathcal{C}^\infty_X(U)\to Z_X(U)$是满射, 但是对于不可缩开集未必.

定理3.1. *(层化sheafication) 设$\mathcal{F}$是X的一个预层, 则存在一个层$\mathcal{F}^+$以及同态$\theta:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^+$ 满足如下性质*

- *如果$\mathcal{G}$是一个层, $\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是同态. 那么存在唯一的同态$\eta^+:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$使得$\eta=\eta^+\circ\theta$.*

上述$\mathcal{F}^+$在同构意义下唯一, 称作$\mathcal{F}$的层化. 另外对任意$x\in X$, 我们有$\theta:\mathcal{F}^+_x\cong\mathcal{F}_x$.

证明. 首先定义预层$\mathcal{F}^+$, 对开集$U\subseteq X$,
$\mathcal{F}^+(U)=\{f:U\to\coprod_{x\in U}\mathcal{F}_x|\ \forall x\in U,\exists V_x,\ s_{V_x}\in\mathcal{F}(V_x)s.t.,f|_{V_x}(y)=s_{V_x}(y)\}$. 由函数的自然粘合性质可以验证$\mathcal{F}^+$是一个层.

构造$\eta^+:\mathcal{F}^+\to\mathcal{G}$, 元素$f\in\mathcal{F}^+(U)$可以表达为$(V_i,s_{V_i}\in\mathcal{F}(V_i))$, $\eta^+(f)=(V_i,\eta(s_{V_i}))$后者可以粘合成$\mathcal{G}(U)$中的元素, 因为$\eta(s_{V_i})_x=\eta(s_{V_j})_x\forall x\in V_{ij}$.

同构唯一性由泛性质决定.

最后给出$\mathcal{F}^+_x$和$\mathcal{F}_x$的一一对应关系(作业). $\square$

定义3.3. 设$\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$为$X$上层的同态, 将像集$Im(\eta)$定义为预层$\eta(\mathcal{F}):U\mapsto\eta(\mathcal{F}(U))\subseteq\mathcal{G}(U)$的层化. $Im(\eta)(U)$中的元素形如$f=(V_i,\eta(s_{V_i})_i$, 其中$\eta(s_{V_i})_x=\eta(s_{V_j})_x=\forall x\in V_{ij}$.

从而有$\eta^+:Im(\eta)\to\mathcal{G}$, 可以证明这是一个单同态(在茎上看), 以后$Im(\eta)\subseteq\mathcal{G}$. 如果"=" 成立则称$\eta$ 是**满同态**.

定义$Coker(\eta)=\mathcal{G}/Im(\eta)$为预层$\mathcal{G}/\eta(\mathcal{F}):U\mapsto\mathcal{G}(U)/\eta(\mathcal{F}(U))$的层化.

对子层$\mathcal{F}'\subseteq\mathcal{F}$, 可以定义商层$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}/\mathcal{F}'(U)=(V_i,\bar{s}_i)_i,(s_i-s_j)_x\in\mathcal{F}'_x$.

定理3.2. *设$\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是拓扑空间$X$上的层的同态.*

(1) $\eta:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$是满同态$\Leftrightarrow$ 对任意$x\in X$, $\eta_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$是满同态.

(2) η是同构$\Leftrightarrow$ η既单又满, $\Leftrightarrow$ 对任意$x\in X$, $\eta_x:\mathcal{F}_x\to\mathcal{G}_x$是同构.

证明. (1) "$\Rightarrow$" 只需验证$\eta(\mathcal{F})^+_x=\eta(\mathcal{F})_x=\eta(\mathcal{F}_x)=\mathcal{G}_x$.

"$\Leftarrow$" 对$t\in\mathcal{G}(U)$, 则由$\eta(\mathcal{F})^+_x=\mathcal{G}_x$, 对任意$x\in U$, $s_x\in\mathcal{F}_x$使得$\eta(s_x)=t_x$, 从而存在邻域V_x以及s_{V_x}同时满足

$$s_x=(s_{V_x})_x,\eta(s_{V_x})=t|_{V_x}.$$

然后验证$\eta(s_{V_x})$在$\eta(\mathcal{F})$中满足粘合条件, 从而给出$\eta(\mathcal{F})^+(U)$的截面.

(2) 证明η既单又满$\Rightarrow$ η是同构. 因为η单, 可以证明预层$\eta(\mathcal{F})$是一个层, 从而$\mathcal{F}\cong\eta(\mathcal{F})\cong\mathcal{G}$. □

注: 描述层直接的关系, 关键是描述茎之间的关系.

定义3.4. 设$f:X\to Y$是拓扑空间的连续映射, $\mathcal{F}$是X上的层, $\mathcal{G}$是Y上的层.

定义X上的层$f^{-1}\mathcal{G}$, 通过预层$f^{-1}\mathcal{G}(U):=\varinjlim_{f(U)\subseteq V}\mathcal{G}(V)$定义.

(作业) 证明$f^{-1}\mathcal{G}_x\cong\mathcal{G}_x$.

Y上的预层$f_*\mathcal{F}:V\mapsto\mathcal{F}(f^{-1}V)$ 是一个层(作业).

补充一个概念$\mathcal{F}$的**支集**$Supp\,\mathcal{F}=\{x\in X|\mathcal{F}_x\neq 0$, 这是个闭集.

命题3.3. *(作业) 记号如上. 层的映射集之间存在一一对应*

$$Hom_X(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})\cong Hom_Y(\mathcal{G},f_*\mathcal{F}).$$

证明. 刻画或者定义同态$\eta:f^{-1}\mathcal{G}\to\mathcal{F})$, 只需要定义预层的同态. □

例3.3. (作业) 设$i:Z\hookrightarrow X$是闭嵌入. $i_*\mathcal{O}_Z(U)=\Gamma(Z\cap U,\mathcal{O}_{Z\cap U})$?; $(i_*\mathcal{O}_Z)_x=\mathcal{O}_{Z,x}$; $(i^{-1}\mathcal{O}_X)_z=\mathcal{O}_{X,z}$ (因为z在Z上的邻域由z在X中的邻域诱导).

3.1.2 层的正合列和整体截面函子的左正合性

定理3.3. *假设X上有层的短正合列$0\to\mathcal{F}_1\to\mathcal{F}_2\to\mathcal{F}_3\to 0$(验证层的序列正合, 只需验证对于每个点$x$, 有$0\to\mathcal{F}_{1,x}\to\mathcal{F}_{2,x}\to\mathcal{F}_{3,x}\to 0$).*

则有以下正合列

$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_1(X) \xrightarrow{\eta_1} \Gamma(X, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\eta_2} \Gamma(X, \mathcal{F}_3).$$

证明. 第一个单射$\Gamma(X, \mathcal{F}_1) \to \Gamma(X, \mathcal{F}_2)$以及复合映射为0都是直接的.

现在验证中间位置的正合性. 给定$s_2 \in ker(\eta_2)$, 则对任意$x \in X$, $(s_2)_x \in \eta_1(\mathcal{F}_{1,x})$. 把$\mathcal{F}_1$看做$\mathcal{F}_2$的子层,可得$s \in \Gamma(X, \mathcal{F}_1)$. □

3.1.3 如何粘接层

定理3.4. 设$\{U_i\}$是X的开覆盖, 如果在每个U_i上定义了一个层$\mathcal{F}_i$, 再定义一个粘合映射$\varphi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_{ij}} \to \mathcal{F}_j|_{U_{ij}}$. 如果粘合映射满足$\varphi_{ij} = \varphi_{ik}\varphi_{kj}$, 那么存在一个层$\mathcal{F}$使得$\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$.

证明. 定义预层$\mathcal{F}$:
对开集U, $\mathcal{F}(U) := \{(s_i)_i \in \prod_i \mathcal{F}_i(U \cap U_i) \mid \varphi_{ij}(s_i|_{U\cap U_{ij}}) = s_j|_{U\cap U_{ij}}\}$. 限制映射可以自然定义.

可以验证$\mathcal{F}$即为所求(作业, 不必求完全) □

定理3.5. *(阅读)* 设$\mathcal{B} = \{U_i\}$是拓扑空间X的一个开集基, 定义一个$\mathcal{B}$-预层

$$\mathcal{F} : \mathcal{B}^{op} \to \mathcal{A},\ U_i \mapsto \mathcal{F}(U_i).$$

如果$\mathcal{F}$ 满足: 如果$U_i = \cup_{j\in J} U_j$, $\mathcal{F}(U_i) = ker(\prod_i(\mathcal{F}(U_j) \to \prod_{j_1j_2}(\mathcal{F}(U_{j_1j_2})$ 则可通过如下方式得到一个层$\tilde{\mathcal{F}}$: $\tilde{\mathcal{F}}(U) := ker(\prod_i(\mathcal{L}|_{U_i}(U \cap U_i) \to \prod_{ij}(\mathcal{L}|_{U_i}(U \cap U_{ij})$

3.2 概型

3.2.1 环化空间

定义3.5. 一个**环化空间**是$(X, \mathcal{O}_X)$, 其中$\mathcal{O}_X$是一个环层.

环化空间$(X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$的映射由$(f, f^\sharp)$给出, 其中$f: X \to Y$是连续映射, $f^\sharp: f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$是环层同态(对任意$f(U) \subseteq V$, 有环同态$\mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(U)$).

局部环层空间$(X, \mathcal{O}_X)$需满足$\mathcal{O}_{X,P}$是局部环, 局部环层空间的映射需要满足诱导的同态

$$\eta_P : \mathcal{O}_{Y,Q=f(P)} := \varinjlim_{Q\in V} \to \varinjlim_{Q\in V} \mathcal{O}_X(f^{-1}V) \to \mathcal{O}_{X,P}$$

是**局部环同态**, 也就是$\eta_P^{-1} m_{X,P} = m_{Y,Q}$.

作业: 设X是微分流形, 请问$(X, \mathcal{C}_X^\infty)$是否是局部环层空间? 如果$Y$是一个微分流形, 则光滑映射$f: X \to Y$是否诱导一个局部环层空间的映射$(f, f^*)$: $(X, \mathcal{C}_X^\infty), (Y, \mathcal{C}_Y^\infty)$?

作业: 设X是代数簇, $(X, \mathcal{O}_X)$是否是局部环层空间? 代数簇间的态射$f: X \to Y$是否诱导一个局部环层空间的映射$(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)$?

3.2.2 交换代数的准备

设A是一个幺环, 其素理想集记作$Spec(A)$, 称作A的谱, 上面可以定义Zariski拓扑: 闭集形如$V(I) := \{P \in Spec(A) | \ I \subseteq P\}$. 可以验证$V(I \cdot J) = V(I) \cup V(J)$以及$V(\sum_k I_k) = \cap_k V(I_k)$. 取$f \in A$, 形如$D_X(f) := Spec(A) \setminus V(f)$的开集称作**主开集**.

命题3.4. 主开集构成$X = Spec(A)$的开集基.

证明. 只需说明每个开集$U = Spec(A) \setminus V(I)$可以表示为主开集的并集. 事实上设$I = (\{f_i\})$, 则$D(f_i) \subseteq U$. 由定义可得$U = \bigcup_i D(f_i)$. □

一些简单的事实:

(1) 设S是A的乘性子集, 则$A \to S^{-1}A$诱导了$Spec(S^{-1}A) \to Spec(A)$, 这恰好给出了$Spec(S^{-1}A)$和$A$的与$S$相交为空集的素理想集合的一一对应. 例如

$$D(s) : \{P \in Spec(A) | \ s \notin P\} = Spec(A_s)$$

.

在这个对应下$V(I)\cap Spec(S^{-1}A)=V(S^{-1}I)$.

(2) $\bigcap_{P\in Spec(A)}P$是由幂零元生成的理想. 事实上, 如果s非幂零元, 则存在素理想P, 使得$s\notin P$, 这个可以考虑局部化$A\to A_s$之间的谱集的对应关系得到.

(3) $V(I)=Spec(A/I)$, $\sqrt{I}=\bigcap_{P\in V(I)}P$. Hilbert零点定理证明的是: 如果$k$是代数闭域, $I\leq k[x_1,\cdots,x_n]$, 则$\sqrt{I}=\bigcap_{m\in V_{max}(I)}m$.

(4) 如果A是Noether环, 则$Spec(A)$是quasi-compact, 也就是每个开集都是紧的.

(5) 命题: 设M是R-模,

(5.1)设$x\in M$, $x=0\in S^{-1}M\Leftrightarrow \exists s\in S, sx=0\in M$.

(5.2) TFAE:

(1) $M=0$; (2) $M_P=0,\forall P\in \mathrm{Spec}(R)$; (3) $M_m=0,\forall m\in \mathrm{Max}(R)$.

3.2.3 仿射概型

定义-命题3.1. 设$X=Spec(A)$, 定义层

$$\mathcal{O}_X(U):=\{f:U\to\coprod_{P\in U}A_P\mid$$
$$\forall P\in U,\ \exists s\in A\setminus P \text{ and } h\in A, s.t. f|_{SpecA_s}=h/s\}.$$

则$(X,\mathcal{O}_X)$是局部环化空间($\mathcal{O}_{X,P}=A_P$), 称作**仿射概型**.

证明. 映射满足唯一粘合条件, 所以$\mathcal{O}_X$是一个环层.

接下来验证$\mathcal{O}_{X,P}\cong A_P$.

(1) 一方面验证映射$A_P=\{[h/s]|...\}\to\mathcal{O}_{X,P}$, $[h/s]\to[f|_{SpecA_s}=h/s]$是良定义的环同态: 若$[h_1/s_1]=[h_2/s_2]$在$A_P$中, 则存在$s\neq P$ 使得$s(s_2h_1-s_1h_2)=0$, 从而在$D(ss_1s_2)$上定义了同一个映射.

(2) 另一方面对$[f]\in\mathcal{O}_{X,P}$, 其中$f=h/s:U\to\coprod_{Q\in U}A_Q$实现, 然后验证$\mathcal{O}_{X,P}\to A_P$, $[f]\mapsto[h/s]$也是良好定义的: 若$[h_1/s_1]=[h_2/s_2]$在$\mathcal{O}_{X,P}$中, 则显

然$h_1/s_1 = h_2/s_2 \in A_P$中.

二者是互逆的映射. $\square$

命题3.5. 设$(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$是仿射概型. *(此处需要$A$是Noether环?)*

(1) $\Gamma(X) := \mathcal{O}_X(X) = A$.

(2) 设$f \in A$, 非幂零元. 则$(U = D_X(f) := Spec(A) \setminus V(f), \mathcal{O}_X|_U)$ 同构于$(Y = Spec(A_f), \mathcal{O}_Y)$.

证明. (1) 设$f \in \Gamma(X)$. 则根据定义可以取$X = \bigcup D(s_i)$以及$f = (h_i/s_i : D(s_i) \to \coprod_{P \in D(s_i)} A_P)$. 由假设

$$\bigcap_i V(s_i) = V(I = (\{s_i\})) = \emptyset.$$

所以$I = A$. 于是存在有限个元素$s_1, \cdots, s_n$ 以及$a_1, \cdots, a_n \in A$ 使得

$$1 = a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n.$$

从而$f = a_1 h_1 + \cdots + a_n h_n$.

上述证明错误.

设$f \in \Gamma(X)$. 则根据定义可以取$X = \bigcup_{i=1}^n D(s_i)$ 以及$f = (h_i/s_i : D(s_i) \to \coprod_{P \in D(s_i)} A_P)$. 注意$D(s_i) \cap D(s_j) = D(s_i s_j) = Spec A_{s_i s_j}$. 由$h_i/s_i|_{D(s_i s_j)} = h_j/s_j|_{D(s_i s_j)}$, 即对任意$P \in Spec A_{s_i s_j}$有$h_i/s_i = h_j/s_j \in A_P$, 可知$h_i/s_i = h_j/s_j \in A_{s_i s_j}$. 从而存在$N$(不依赖于$i, j$)使得$(s_i s_j)^N (h_i/s_i - h_j/s_j) = 0 \in A$.

由假设

$$\bigcap_i V(s_i) = V(I = (\{s_i\})) = \emptyset.$$

所以$I = A$. 于是存在有限个元素$s_1, \cdots, s_n$ 以及$a_1, \cdots, a_n \in A$ 使得

$$1 = a_1 s_1^N + \cdots + a_n s_n^N.$$

从而比如在$D(s_1)$上, 我们有

$$h_1/s_1 = a_1 s_1^{N-1} h_1 + (a_2 s_2^N h_1/s_1 = a_2 h_2 s_2^{N-1}) + \cdots (a_n h_n s_n^{N-1}).$$

(2) 验证:

(2.1) 环同态$\eta : A \to A_f$诱导的$\phi : Y = Spec(A_f) \to D_X(f) = Spec(A) \setminus V(f)$是一一对应;

(2.2) 验证ϕ是连续映射, $\phi^{-1}V(I) = V(IA_f)$; $\phi^{-1} : Spec(A) \setminus V(f) \to Spec(A_f)$ 连续, $\phi(V(J \leq A_f)) = V(J^c) \cap (Spec(A) \setminus V(f))$;

(2.3) 由$\mathcal{O}_{Y,P} = (A_f)_P \cong A_P = \mathcal{O}_{X,P}$ 以及在开集上截面的构造(作为函数)对任意开集$U \subseteq Y, V = \phi(U)$, 易得$\mathcal{O}_Y(U) \cong \mathcal{O}_X(V)$, 而且这个同构和限制映射相容. □

3.2.4 概型

定义3.6. 一个**概型**是一个局部环化空间$(X, \mathcal{O}_X)$满足: 任意$P \in X$都有一个仿射开邻域, X称作**承载拓扑空间**(underlying space), $\mathcal{O}_X$ 称作**结构层**(structure sheaf).

概型之间的态射经常简记作$f : X \to Y$.

可定义X的**开子概型**

设$Z \subseteq X$是X的一个闭子集, 如果存在一个支集为Z的环层$\mathcal{O}_Z$, 使得(1) $(Z, \mathcal{O}_Z)$是一个概型; (2) 存在理想层$\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$使得$\mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Z$. 则称$(Z, \mathcal{O}_Z)$为$X$的**闭子概型**, $\mathcal{I}_Z$称作$(Z, \mathcal{O}_Z)$在X中的定义理想层.

概型的**开浸入**(open immersion): $j : U \hookrightarrow X$, 如果j是开嵌入, 而且$j^{-1}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_U$, 则$Im(j) \cong (U, \mathcal{O}_U)$ 为X 的**开子概型**.

概型的**闭嵌入** (closed submersion): $i : Z \hookrightarrow X$, 如果i是闭嵌入, 而且$i^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z$ 是满同态, 称$Im(i) \cong (Z, \mathcal{O}_Z)$为$X$的**闭子概型**.

定理3.6. *仿射概型$(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$和$(Y = Spec(B), \mathcal{O}_Y)$之间的态射集$Mor(X, Y)$和$Hom_{ring}(B, A)$ 一一对应.*

证明. 给定幺环同态$\eta : B \to A$, 容易验证诱导的映射$\phi_\eta : SpecB \to SpecA$是概型之间态射.

反之给了态射$\phi : X \to Y$, 则ϕ诱导$\phi^* : \phi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$, 从而得到一个同态$\eta : B \to A$. 现在验证$\phi = \phi_\eta$. 事实上只需证明点集上映射吻合即可.

需要用到"局部性". 设$P \in Spec(A)$, 令$Q = \phi(P) \in Spec(B)$. 由于ϕ是局部环层空间的映射, 我们有局部环的映射$\phi^* : B_Q \to A_P$, 这个映射和η 相容, 于是得

到$\phi_\eta(P) = Q$. □

命题3.6. 设I是A的理想, 则$(Z = SpecA/I, \mathcal{O}_Z)$是$(X = Spec(A), \mathcal{O}_X)$闭子概型.

证明. 构造理想子层$\mathcal{I}(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) | \forall P \in X, f_P \in I_P\}$. □

命题3.7. 设X是概型, $f \in \Gamma(X)$. 证明: $Z(f) = \{x \in X | f \in m_{X,x}\}$是$X$的闭集. 以后记$D_X(f) = X \setminus Z(f)$.

注3.1. (1)一个概型的仿射开集是概型的拓扑基.

(2) 仿射概型的主开集构成开集基.

(3) 闭子概型局部上由仿射开集上的一个理想定义. (设$Z \subseteq X$是一个闭子概型, 不妨设X仿射. 取Z的仿射开集Z', 存在开集$U \subseteq X$, $Z' = U \cap Z$. 存在$f \in \Gamma(X)$使得$D_X(f) \subseteq U$. 可以证明$D_Z(f) \subseteq Z'$以及$D_Z(f) = D_{Z'}(f)$是一个仿射开集, 从而得到仿射概型$D_X(f)$中的一个仿射闭子概型$D_Z(f)$.

命题: 设$X = SpecA$, $Z = SpecB$是X的仿射闭子概型. 则Z由A的一个理想定义. (证明$A \to B$是满同态, 核I恰好定义Z.)

3.2.5 如何粘合概型以及概型之间的态射

粘合概型: 设$\{U_i\}_{i \in I}$为X的开覆盖, $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ 为概型. 如果有粘合数据$(id, \eta_{ij}) : (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i}|_{U_{ij}}) \to (U_{ij}, \mathcal{O}_{U_j}|_{U_{ij}})$满足粘合条件, 则可以粘成概型.

思考: 如何通过粘合描述以及定义两个概型之间的映射?

$f : X \to Y$, 分别找Y的一组仿射开覆盖$\{V_i\}$, 需要对每个V_i, 能够找仿射开覆盖分解$f^{-1}V_i = \{U_{ij}\}$分解, 分别描述$f_{ij} : U_{ij} \to V_i$, 要给一个定义的话需要f_{ij}满足粘合条件, 往往$U_{ij} \cap U_{kl}$也是一个仿射开集, 只要验证局部环上诱导的映射一致就可以.

引理: 设$\eta_i : A \to B, i = 1, 2$为环同态. 如果对任意$Q \in SpecB$.

例3.4. 可以通过粘合定义概型$\mathbb{P}^n_k$:

Step 1: 定义$\mathbb{A}^n_k = Speck[x_1, \cdots, x_n]$.

Step 2: 固定齐次坐标$[X_0, \cdots, X_n]$. 定义$U_i = Speck[X_0/X_i, \cdots, X_n/X_i]$.

Step 3: 定义

$$U_{ij} = Spec(k[X_0/X_i, \cdots, X_n/X_i]_{X_j/X_i} = k[X_0/X_j, \cdots, X_n/X_j]_{X_i/X_j}).$$

于是$U_{ij} = \cong D_{U_i}(X_j/X_i) \cong D_{U_i}(X_j/X_i)$.

Step 4: 类似定义U_{ijk}, 然后通过粘合定义$\mathbb{P}_k^n = \bigcup(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$.

可以定义**射影概型**, **拟射影概型**; 对整的拟射影概型可以定义其**维数**$\dim_k X$, 进而对拟射影概型可以定义其维数为不可约整分支的维数的最大值.

设I是$k[X_0, \cdots, X_n]$的齐次理想, 通过在仿射片$\mathbb{A}_k^n$上定义仿射概型, 然后自然粘合为射影闭子概型$V_p(I) \subseteq \mathbb{P}_k^n$.

例3.5. 将$f : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2, [X, Y] \mapsto [X^2, XY, Y^2]$补充为概型之间的态射.

3.2.6 概型的基本性质

可约(reducible): X作为拓扑空间不可约. 反例$X = Spec(k[x, y]/(xy) \subset \mathbb{A}^2$.

Rmk: 对于不可约概型, 任意两个开集相交.

既约(reduced): 局部上$U = SpecA$, A中没有幂零元. 反例$X = Speck[x]/(x^2)$.

整概型(integral scheme): 每个开集U, $\Gamma(U)$是整环, 这蕴含着X是不可约的.

对整概型X可定义函数域$K(X)$: 设$U = SpecA$为X的仿射开集. 定义$K(X) = FracA$. 证明: 对任意$x \in X$, 存在自然嵌入$\mathcal{O}_{X,x} \subseteq K(X)$.

命题3.8. 概型X是整的当且仅当X是不可约的和既约的.

证明. $\Rightarrow$ 验证不可约. 否则假设$X = X_1 \cup X_2$. 令$U_i = X \setminus X_i$. 则U_i非空, 而且$U_1 \cap U_2 = \emptyset$. 此时$\mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2) = \mathcal{O}_X(U_1) \times \mathcal{O}_X(U_2)$不是整环. □

命题3.9. 设X是一个概型, 则存在一个既约的闭子概型$X_{red} \subseteq X$而且二者有相同的支集.

证明. 可以定义幂零理想层$\mathcal{N} \subset \mathcal{O}_X$ (对Noether概型可以直接定义，否则需要一个层化的过程). 令

$$(X_{red} = X, \mathcal{O}_{X_{red}} = \mathcal{O}_X/\mathcal{N}.$$

□

例子(作业): 令$X = Speck[x, y]/(x^2, xy)$, 描述$X_{red}$.

3.2.7 概型和代数簇之间的联系

假设k是代数闭域.

设$\mathcal{V}ar/k$是k上代数簇范畴; $\mathcal{S}ch/k$是k-概型范畴: 对象为概型X以及一个态射$X \to Speck$(记作X/k), 态射为$X/k \to Y/k$.

命题3.10. *存在完全忠实函子$\mathcal{V}ar/k \to \mathcal{S}ch/k$.*

证明. 代数簇和概型都是仿射对象粘合而成, 粘合本质上态射. 所以我们只需要构造仿射对象范畴之间的函子

$$\mathcal{A}ff{-}\mathcal{V}ar/k \to \mathcal{A}ff{-}\mathcal{S}ch/k,\ X = V(I)(\subseteq \mathbb{A}^n) \mapsto X_{sch} := Spec(\Gamma(X) \cong k[x_1, \cdots, x_n]/I(X))$$

验证$Mor_{var/k}(X, Y) = Mor_{sch/k}(X_{sch}, Y_{sch})$. □

假设k是代数闭域. 为区分, 我们用$X_{sch} = V_{sch}(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$代表概型$Spec(A = k[x_1, \cdots, x_n]/I)$, $X_{var} = V(I) \subseteq \mathbb{A}_k^n$代表代数集.

从集合的角度, 前者包括A的素理想, 后者包括极大理想.

函数角度, 在极大理想处的局部环一致.

态射角度, 两个仿射代数集和仿射概型的态射有自然的对应.

概型相比代数簇包括了函数的信息, 比如$Speck[x]/(x^n)$ 和$Speck[x]/(x)$作为代数簇时无法区分, 但作为概型是不同的; 另外考虑素理想集合作为底空间, 在非代数闭域上也并不损失信息. 比如$Spec\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 + 1)$并不是空集, 可以视为实数域上的代数曲线.

作业: 设k是代数闭域. 描述k概型之间的态射集$\mathrm{Mor}_{sch/k}(\mathrm{Spec}k[t]/(t^2), \mathrm{Spec}k[x, y])$.

3.2.8 仿射概型判别法

定理3.7. *仿射概型的闭子概型是仿射概型.*

引理3.1. *(仿射概型判别法) 设概型X满足: 存在$f_1, \cdots, f_n \in \Gamma(X)$使得$X_{f_i}$是仿射概型而且$(f_1, \cdots, f_n) = A$. 则$X$是仿射概型.*

3.3 Cartier除子和可逆层

3.3.1 可逆层

定义3.7. 设X是一个概型, $\mathcal{M}$是X上的层. 称$\mathcal{M}$是一个$\mathcal{O}_X$-**模层**, 如果对每个开集U, $\mathcal{M}(U)$是$\mathcal{O}_X(U)$-模.

设$\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$是$\mathcal{O}_X$-模层. **模层的同态**$\varphi:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$, 额外需要$\mathcal{M}_1(U)\to\mathcal{M}_2(U)$是$\mathcal{O}_X(U)$-模同态.

例3.6. $\mathcal{O}_X,\mathcal{I}_Z,i_*\mathcal{O}_Z=\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_Z$; 如果$X$是整概型, 函数域常值层$K(X)$.

命题3.11. *(作业)* 记号如上. 模层同态集合, 记作$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$, 带有自然的$\mathcal{O}_X(X)$-模结构. *(如何定义$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2)$?)*

定义3.8. 设X是一个概型, 秩为1的局部自由$\mathcal{O}_X$-模$\mathcal{L}$称作一个可逆层, 具体描述: 存在X的开覆盖$\{U_i\}$以及模层同构$\eta_i:\mathcal{L}|_{U_i}\cong\mathcal{O}_{U_i}$, 则称$\mathcal{L}$ 是一个**可逆层**. 此时有同构$\eta_{ij}:=\eta_j\eta_i^{-1}:\mathcal{O}_{U_{ij}}\to\mathcal{O}_{U_{ij}}$ 仍是模层同构, 满足$\eta_{ij}=\eta_{ik}\eta_{kj}$.

思考: 如何描述一个可逆层?

如果存在开覆盖$\{U_i\}$, 如果定义了$\eta_i:\mathcal{L}|_{U_i}\cong\mathcal{O}_{U_i}$, 记$s_i=\eta_i^{-1}(1)\in\mathcal{L}(U_i)$. 则$\mathcal{L}|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\cdot s_i$. 那么在$U_{ij}$上存在$f_{ij}\in\Gamma(U_{ij})^\times$使得$s_i=f_{ij}s_j$, 这里注意$f_{ij}=f_{ik}f_{kj}$.

反之给出开覆盖$\{U_i\}$以及$f_{ij}\in\Gamma(U_{ij})^\times$满足条件$f_{ij}=f_{ik}f_{kj}$, 则可以通过如下粘合方式定义一个可逆层$\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\cdot s_i,\ \varphi_{ij}:\mathcal{O}_{U_{ij}}\cdot s_i\to\mathcal{O}_{U_{ij}}\cdot s_j, s_i\mapsto f_{ij}s_j.$$

例3.7. $X=\mathbb{P}^n=\cup_i\mathbb{A}_i^n$, 定义$\mathcal{O}(d)|_{\mathbb{A}_i^n}=\mathcal{O}\cdot(s_i=X_i^d)$. 于是$s_i=s_j(\frac{X_i}{X_j})^d$.

当$d=0$时, $\mathcal{O}(0)=\mathcal{O}$; 当$d>0$时, $X_i^d\in\Gamma(X,\mathcal{O}(d))$.

作业: 当$d\geq 0$时, $\Gamma(X,\mathcal{O}(d))=Span_k\{X_0^{i_0}X_1^{i_1}\cdots X_n^{i_n}\}_{i_0+\cdots+i_n=d}$.

注: 设X是整概型, $\mathcal{L}$是一个可逆层. 假设给定开覆盖$\{U_i\}$, 以及$\mathcal{L}|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\cdot s_i$. 则每个截面$s\in\Gamma(X,\mathcal{L})$可以由其中一个开集上的表达式唯一确定, 即表达为$s=a_{i_0}\cdot s_{i_0}$. 所以要刻画$\Gamma(X,\mathcal{O}(d))$, 注意如果$g$是$l$-次多项式, 则

$$g(x_1,\cdots,x_n)s_0=\frac{G(X_0,X_1,\cdots,X_n)}{X_0^l}(X_0/X_i)^d s_i,$$

从而$\Gamma(X,\mathcal{O}(d))=\{f(x_1,\cdots,x_n)s_0|\deg f\leq d\}$.

例3.8. $X=\mathbb{P}^1$, $\Omega_X(U)$为开集U的微分形式集合. 要描述Ω_X, 可以把$\mathbb{P}^1$分成两个仿射直线.

作业: $\Omega_{\mathbb{P}^1}\cong\mathcal{O}(-2)$.

命题3.12. *设Z为X上的闭子概型, 有理想层$\mathcal{I}$定义. 定义$\mathcal{L}|_Z$定义为商层*

$$0\to\mathcal{I}\cdot\mathcal{L}\to\mathcal{L}\to\mathcal{L}|_Z\to 0.$$

则$\mathcal{L}|_Z$是Z上的可逆层.

3.3.2 除子

定义3.9. 设X是一个代数簇(不可约整概型), 一个**Cartier 除子**D是一组数据$\{(U_i,f_i)\}$其中$0\neq f_i\in K(X)$, 满足$\forall i,j$, $f_i/f_j\in\Gamma(U_{ij})^\times$, 换言之, f_i和f_j的零点和极点在U_{ij}上一致.

除子D给出了常值层$K(X)$的一个可逆子层$\mathcal{O}_X(D)|_{U_i}:=\mathcal{O}_X\cdot\frac{1}{f_i}\subset K(X)$.

(1) 两组数据$\{(U_i,f_i)\}$和$\{(V_j,g_j)\}$定义同一个除子, 如果在$U_i\cap V_j$上, 存在$u\in\mathcal{O}_X(U_i\cap V_j)^*$ 使得$f_i=ug_j$. 比较时可以通过加细假设$U_i=V_i$.

(2) 称两个除子$D_1:\{(U_i,f_i)\}$和$D_2:\{(V_j,g_j)\}$线性等价, 如果存在$h\in K(X)$使得$\{(U_i,f_ih)\}$和$\{(V_j,g_j)\}$定义同一个除子. 线性等价关系记作$D_1\sim D_2$.

(3) 对除子$D:\{(U_i,f_i)\}$, 如果每个$f_i\in\Gamma(U_i)$, 则称D是**有效除子**, 记作$D\geq 0$.

可以证明如果两组数据$\{(U_i,f_i)\}$和$\{(V_j,g_j)\}$定义同一个除子, 则两组数据定义的可逆层$\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$同构. 一种观点是二者视为$K(X)$的子层刚好是相等的; 另一种是直接构造同构: 可以通过加细假设$U_i=V_i$. 在U_i 上, 存在$u_i\in\mathcal{O}_X(U_i)^*$ 使得$f_i=u_ig_i$. 然后定义

$$\eta:\mathcal{L}_1|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\frac{1}{f_i}\to\mathcal{L}_2|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\frac{1}{g_i}, f\cdot\frac{1}{f_i}\mapsto(u_if)\cdot\frac{1}{g_i}$$

定理3.8. *两个除子线性等价当且仅当对应的可逆层是同构的.*

证明. 假设$D_1\sim D_2$ 分别对应两组数据$\{(U_i,f_i)\}$和$\{(U_i,g_i=hf_i)\}$. 则可以构造两组数据定义的可逆层$\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2$同构

$$\eta:\mathcal{L}_1|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\frac{1}{f_i}\to\mathcal{L}_2|_{U_i}=\mathcal{O}_{U_i}\frac{1}{g_i},\ f\cdot\frac{1}{f_i}\mapsto f\cdot\frac{1}{g_i}.$$

□

例3.9. 假设$X = V_p(X_0^3 - X_1^3 - X_2^3) \subseteq \mathbb{P}^2$. 除子$D$: $(V_0 = U_0 \cap X, X_1/X_0 - 1)$, $(V_1, X_0/X_1 - 1)$, $(V_2, 1)$.

例3.10. $X = \mathbb{P}^n = \cup_i \mathbb{A}_i^n$, 设$F(X_0, \cdots, X_n)$是一个$d$次齐次多项式, 于是定义除子$D_F := \{(\mathbb{A}_i^n, F/X_i^d)_i\}$.

(1) d次齐次多项式定义的除子线性等价.

(2) $\mathcal{O}(D_F)|_{\mathbb{A}_i^n} = \mathcal{O} \cdot s_i (:= X_i^d/F)$, $s_i = (X_i/X_j)^d s_j$.

(3) $\mathcal{O}(D_F) \cong \mathcal{O}(d)$.

3.3.3 可逆层的张量

定义3.10. 设X是一个概型, $\mathcal{M}$是X上的可逆层, $\mathcal{L}$是X上的可逆层. 定义**模层张量积**$\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$为预层$U \mapsto \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{L}(U)$的层化.

事实上, 如果$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$是$X$上的可逆层, 假设他们由如下方式给出$\mathcal{L}_t|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} s_t$, 则其张量积$\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}(s_1 s_2)$ 仍是一个可逆层(如何验证? 事实上在U_i上已经是一个层).

除子加法$D_1 + D_2 := \{(U_i, f_i g_i)\}$, $D_1 : \{(U_i, f_i)\}, D_2 : \{(U_i, g_i)\}$.

命题3.13. *设$\mathcal{L}$是X上的可逆层, 由数据(U_i, s_i)给出. 可以定义$\mathcal{L}^{-1}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \frac{1}{s_i}$.*

设$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$是$X$上的可逆层, 则

(1) $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \cong \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2$,

(2) $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \cong \Gamma(X, \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2)$.

(3)设X是整概型, D_1, D_2为除子. 则$\mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X(D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1 + D_2)$.

证明. (1) 设$\mathcal{L}_1|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot s_i$, $\mathcal{L}_2|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i} \cdot t_i$.

构造: $\eta_i : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i} \cdot t_i/s_i$.

设$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}^{pre}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$是一个预层, $U \mapsto Hom_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{L}_1(U), \mathcal{L}_2(U))$. 我们只需要构造预层同态$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}^{pre}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|_{U_i} \to \mathcal{O}_{U_i} \cdot t_i/s_i$并且验证在每个点处的茎上是同构即可. 对$V \subseteq U_i$, 有自然同态:

$$\eta_i(V) : \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X(V)}(\mathcal{L}_1(V) = \mathcal{O}_X(V)s_i, \mathcal{O}_X(V)t_i) \to \mathcal{O}_X(V) \cdot t_i/s_i,\ \phi \mapsto \frac{\phi(s_i)}{t_i} \cdot t_i/s_i.$$

最后验证η_i可以粘合.

(2,3) 容易. $\square$

命题3.14. 设X是概型. 则

(1) X*上的可逆层集合的同构类在张量积下构成一个交换群, 称作***皮卡群***, 记作*$\mathrm{Pic}(X)$*, 单位元是*$\mathcal{O}_X$*.*

(2) 假设X*是整概型. 则*X*的除子集合*$Div(X)$*是一个加法群.*

(3) 映射$Div(X) \to \mathrm{Pic}(X)$, $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$*是一个群同态, 核*$\mathcal{P}(X) = \{D|D \sim 0\}$*中的除子称作***主除子***(principal divisor).*

命题3.15. 设X是一个概型, D是X的一个有效除子, 由$\{(U_i, f_i)\}$给出

(1) $\mathcal{O}_X(D)$ *有一个自然的截面*$s_D|_{U_i} = f_i \cdot \frac{1}{f_i}$*;*

(2) 得到理想层$\mathcal{O}_X(-D)$*, 并得到一个概型*D*. 我们有如下正合列*

$$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

张量一个可逆层$\mathcal{L}$, 得到$0 \to \mathcal{O}_X(-D) \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{L} \to \mathcal{O}_D \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{L}|_D \to 0$.

证明. 不妨设$U_i = SpecA_i$是仿射概型, $f_i \in A_i$, 定义概型$D = \bigcup_i (V(f_i) = SpecA_i/(f_i))$. $\square$

作业: 设k是域, char $k \neq 2, 3$. 设$C = V_p(X_0^2 - X_1^2 - X_2^2) \subset \mathbb{P}^2$.

(1) 证明$C \cong \mathbb{P}^1$; (2) 计算$\dim_k \Gamma(C, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_C)$;

(3) 如果char $k = 2$ 呢? 思考即可.

(4) 令$C' = V_p(X_0^3 - X_1^3 - X_2^3) \subset \mathbb{P}^2$. 思考$\dim_k \Gamma(C', \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_{C'})$.

4　射影平面上相交几何

设k是代数闭域, $X \subseteq \mathbb{P}_k^2$是一个拟射影概型. $\dim X$定义为其既约分支的极大维数.

4.1　交换代数预备知识

4.1.1　模的局部化

命题: 设M是R-模, TFAE:

(1) $M = 0$; (2) $M_P = 0, \forall P \in \mathrm{Spec}(R)$; (3) $M_m = 0, \forall m \in \mathrm{Max}(R)$.

Proof. (3) $\Rightarrow$ (1). 否则, 可取$x \in M$, $x \neq 0$, $\mathrm{Ann}(x) \subsetneq R$. 存在$m \in \mathrm{Max}(R)$, 使得$\mathrm{Ann}(x) \subseteq m$. 令$S = R \setminus m$, 则$x \neq 0 \in S^{-1}M$.

4.1.2　Artin 环

定义: 如果R的每个理想降链终止, 则R称作**Artin环**; 如果R-模M每个子模降链终止, 则M称作**Artin模**.

命题: Artin 模的子模和商模都是Artin的.

命题: 设R是Artin环. 则

(1) R只有有限多个极大理想$m_1, \cdots, m_n$.

(2) $\frac{R}{m_1 \cap m_2 \cap \cdots \cap m_n} \cong R/m_1 \times \cdots \times R/m_n$.

(3) R中的素理想是极大理想.

(4) 令$J = m_1 \cap m_2 \cap \cdots \cap m_n$, 则存在$k$使得$J^k = 0$.

(5) $R \cong R/m_1^k \times \cdots \times R/m_n^k$.

(6) R是Noether环.

Proof. (1) 用这个结论: 理想的交$P_1 \cap \cdots P_n \subseteq Q$, 如果$Q$是素理想, 则至少一个$P_i \subseteq Q$.

(2) 中国剩余定理.

(3) 取素理想$P \subset R$, 那么R/P是整环. 取$\bar{x} \in R/P$, 如果$\bar{x}$不可逆, 那么$(\bar{x}^n)$是严格单调递降的理想.

(4) 首先考虑理想降链$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq \cdots$. 由Artin性质, 存在$k$使得$J^k = J^{k+1}$. 如果$J^k \neq 0$, 考虑理想集合$X = \{I \subseteq J \mid IJ^k \neq 0\}$, 则$X$有极小元$I_0$. 此时可知$I_0 = (x)$, $xJ^k = xJ^k \cdot J^k \neq 0$, 由$I_0$的极小性知$xJ^k = I_0$, 从而存在$y \in J^k$使得$x = xy$. 但是$1 - y$是可逆元.

(5) 取k使得$J^k = 0$, 则$m_1^k \cap \cdots \cap m_n^k = 0$, 那么然后根据中国剩余定理可以得到结论.

(6) 只需考虑R/m^r. 对r归纳, 注意m^{r-1}/m^r作为R/m^r-模, 事实上是$k = R/m$模, 由Artin性质得到m^{r-1}/m^r是有限维的k-线性空间.

命题: 如果R-模M既是Artin又是Noether, 那么M有可以分解为单模的合成列.

4.1.3 $k[x,y]$中的理想

设$I \leq k[x,y]$是非平凡理想.

Case 1: $I = (F)$其中$F \in k[x,y]$. I是素理想当且仅当F不可约. 如果$F = F_1^{n_1} \cdots F_m^{n_m}$, 可记$V_{sch}(I) = n_1 V(F_1) + n_m V(F_m)$.

Case 2: I不是主理想.

Case 2.1 $I \subset (F_1)$. 则$I = (F_1) \cdot I_1$, 归纳可得$I = (F) \cdot I'$, 其中I'不包含在任何非平凡主理想中. $V(I) = V(F) \cup V(I')$.

Case 2.2: I不包含在任何非平凡主理想中, 所以I中的多项式最大公因子平凡.

Step 1(作业): 存在$f, g \in I$, $gcd(f,g) \sim 1$.

Step 2(作业): $V(I) = \{P_1, \cdots, P_m\}$.

Step 3: 注意$I(V(I)) = m_{P_1} \cdots m_{P_m}$, 故存在$r > 0$使得$m_{P_1}^r \cdots m_{P_m}^r \subseteq I \subseteq m_{P_1} \cdots m_{P_m}$.

Step 4: 令$k[x,y]/m_{P_1}^r \cdots m_{P_m}^r \cong \bigoplus (k[x,y]/m_{P_i}^r) \to k[x,y]/I \to k[x,y]/m_{P_1} \cdots m_{P_m} \cong \bigoplus k[x,y]/m_{P_i} \cong k_{P_i}$.

所以$k[x,y]/I$是Artin 环.

Step 5: 设$m_i \leq k[x,y]/I$是m_{P_i}对应的极大理想$(ker(k[x,y]/I \to k[x,y]/m_{P_i}))$, $k[x,y]/I \cong \bigoplus \frac{k[x,y]/I}{m_i^r} \cong \bigoplus k[x,y]/Q_i$. 令$Q_i = ker(k[x,y] \to k[x,y]/m_{P_1}^r \to \frac{k[x,y]/I}{m_i^r})$, 则$m_{P_1}^r \leq Q_i \leq m_{P_1}$, 此时$I = \prod_i Q_i$.

例4.1. $I = (x^2(y-1),(x-1)^2y^2)$, $k[x,y]/I \cong ?$

4.2 0维子概型

4.2.1 Artin 环的谱概型

设R是Artin 环. 则

(1) 每个素理想极大, 而且只有有限多个极大理想$m_1,\cdots,m_n$, 存在$N>0$使得$m_1^N\cdots m_n^N = 0$.

(2) $R \cong R_1(:= R/m_1^N) \times \cdots \times R_n(:= R/m_n^N)$. (用中国剩余定理, 注意$m_i^N + m_j^N = R$.)

(3) $(X = SpecR, \mathcal{O}_X) = \coprod_i (P_i = SpecR_i, \mathcal{O}_{X,P_i} = R_i)$.

(4) 如果$\mathcal{L}$是X上的可逆层, 则$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$.

例子: (1) 如果R是有限生成k-代数, 如果$\dim_k R$有限, 则R是Artin环.

(2) 设$f,g \in [x,y]$, $gcd(f,g) \sim 1$, 则$R = k[x,y]/(f,g)$是Artin环.

作业: 估算$\dim(R = k[x,y]/(x^2-y^3, x^3-y^2))$的上界, 不要求精确; 对一般的$f,g$, 可否给个上界?

作业: $\dim k[x_1,\cdots,x_n]/(m_1\cdots m_r)^N = ?$.

命题4.1. 设k是代数闭域. 则$k[x_1,\cdots,x_n]/I$是*Artin*环当且仅当$V(I) = \{P_1,\cdots,P_r\}$. 此时$I = I_1\cdots I_r$使得$\sqrt{I_i} = m_{P_i}$, 从而

$$X = \sqcup_i Speck[x_1,\cdots,x_n]/I_i.$$

证明. $\Leftarrow$: $\sqrt{I} = m_1\cdots m_r$. 设$P_i = (a_1^i,\cdots,a_n^i)$. 则$m_1\cdots m_r = (\{\prod_i (x_{j_i} - a_{j_i}^i)\}_{j_1,\cdots,j_r})$. 存在$N>0$使得$\prod_i (x_{j_i} - a_{j_i}^i)^N \in I$, 假设生成

元有M个，则$(m_1\cdots m_r)^{MN} \le I$. 根据$k[x_1,\cdots,x_n]/(m_1\cdots m_r)^{rN} < +\infty$，得$\dim(k[x_1,\cdots,x_n]/I) < +\infty$. 所以$k[x_1,\cdots,x_n]/I$是Artin环

最后可以根据$k[x_1,\cdots,x_n]/I \cong \prod_i \frac{k[x_1,\cdots,x_n]/I}{\overline{m_{P_i}}^N}$，于是可以令$I_i = I + m_{P_i}^N$. 另一种方案是令$I_i = I_{m_{P_i}} \cap m_{P_i}$，然后验证$I_{m_P} = (I_1\cdots I_r)_{m_P}$. □

4.2.2 拟射影0维子概型

设k是代数闭域，$X \subseteq \mathbb{P}^n_k$是一个拟射影概型. 则作为拓扑空间$X$有有限多个不可约分支$X_1,\cdots,X_r$. 回顾：我们曾经建立了一个从代数簇范畴到整$k$-概型的忠实函子，事实上每个$X_i$来源于一个代数簇$X_i^{var}$的概型化的拓扑空间，定义$\dim X_i = \dim X_i^{var}$. $\dim X$定义为其既约分支的极大维数.

命题4.2. *设$X \subset \mathbb{A}^n_k$是0维闭子概型. 则$X = Spec\ k[x_1,\cdots,x_n]/I$，其中$k[x_1,\cdots,x_n]/I$ 是Artin环.*

证明. 我们在0维情形证明仿射概型的的闭子概型由一个理想定义.

Step 1. $X = \{P_1,\cdot,P_r\}$. 因为X是闭子概型，存在$f_i \in k[x_1,\cdots,x_n]$使得$P_i = D(f_i)\cap X$，并且

$$\mathcal{O}_{X,P_i}) = R_i = \frac{k[x_1,\cdots,x_n]_{f_i}}{J_i} \cong \frac{k[x_1,\cdots,x_n,y]}{I_i}$$

其中$\sqrt{I_i}$是极大理想，所以R_i是Artin局部环.

Step 2. 由Step 1 得$X \cong Spec\prod_i R_i$. 概型的嵌入$X \to \mathbb{A}^n_k$诱导了$k[x_1,\cdots,x_n] \to \prod_i \frac{k[x_1,\cdots,x_n]_{f_i}}{J_i}$.

Step 3. 证明$k[x_1,\cdots,x_n] \to \prod_i \frac{k[x_1,\cdots,x_n]_{f_i}}{J_i}$是个满同态. 令$\mathcal{Q}_i = J_i \cap k[x_1,\cdots,x_n]$.

对固定的i，$\eta_i : k[x_1,\cdots,x_n] \to \frac{k[x_1,\cdots,x_n]_{f_i}}{J_i}$，由于后者是Artin局部环，则$\frac{k[x_1,\cdots,x_n]}{\mathcal{Q}_i}$ 也是Artin局部环，有唯一的极大理想，容易验证$\sqrt{\mathcal{Q}_i} = m_{P_i}$.

现在证明η_i是满同态. 对任意$\frac{\bar{g}}{f_i^N} \in \frac{k[x_1,\cdots,x_n]_{f_i}}{J_i}$，注意$f_i = f_i(P_i) + h_i$其中$f_i(P_i) \neq 0$并且$h_i \in m_{P_i}$，则$\overline{h_i}$在$\frac{k[x_1,\cdots,x_n]_{f_i}}{J_i}$中必为幂零元，所以(Taylor展开)$\frac{\bar{g}}{f_i^N} = \overline{g_i}$其中$g_i \in k[x_1,\cdots,x_n]$.

最后利用$\mathcal{Q}_1,\cdots,\mathcal{Q}_r$互为极大，令$I = \mathcal{Q}_1\cdots\mathcal{Q}_r$，由中国剩余定理可得结论. □

命题4.3. *设$X \subset \mathbb{P}_k^n$是k上的拟射影0维闭子概型. 则*

$$X = \coprod_{i=1}^{t} (P_i, \mathcal{O}_{X,P_i} = k[x_1, \cdots, x_{n_i}]/I_i)$$

其中

(0) $\sqrt{I_i} = m_{P_i}$.

从而

(1) $X \cong Spec \prod_i (k[x_1, \cdots, x_{n_i}]/\mathcal{Q}_i)$是一个仿射概型.

(2) X是$\mathbb{P}_k^n$的闭子概型.

(3) 存在一个坐标变换使得$X \subset \{X_0 \neq 0\}$, 从而X是$\mathbb{A}^n$的一个闭子概型.

(4) 令$J = (\{X_0^{\deg f} f | f \in I\})$. 则$X = V_p(J)$是$\mathbb{P}_k^n$的射影概型.

证明. 因为$\mathbb{P}_k^n$的每个开集都是紧的, 则X可以视为有限个$\mathbb{P}_k^n$的仿射k-概型的仿射闭子概型, 每一个可以视为$\mathbb{A}_k^n$的一个主开集$D(f) = Speck[x_1, \cdots, x_n]_f \cong Speck[y_1, \cdots, y_m]$, 所以同构于$Speck[y_1, \cdots, y_m]/J$, .

Step 1: 首先假设X是$Speck[y_1, \cdots, y_m]/J$的仿射闭子概型. 假设$X = V(J) \subset \mathbb{A}_k^m$. 于是$X$有有限多个不可约分支, 又由于$X$是0维的, 可设$X = \{P_1, \cdots, P_r\}$, 每个$P_i$既是开集也是闭集, 并且$\sqrt{J} = m_{P_1} \cdots m_{P_r}$, 存在$N$使得$m_{P_1}^N \cdots m_{P_r}^N \leq J$. 从而$k[y_1, \cdots, y_m]/J$是Artin环.

容易证明$\mathcal{O}_{X,P_i} = (k[y_1, \cdots, y_m]/J)_{m_{P_i}} \cong k[y_1, \cdots, y_m]/\mathcal{Q}_i$, 其中$\sqrt{\mathcal{Q}_i} = m_{P_i}$.

Step 2: 于是可以设$X = \{P_1, \cdots, P_t\}$, 进而$X = \coprod_{i=1}^t (P_i, \mathcal{O}_{X,P_i})$.

Step 3: 现在证明$(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i})$是$\mathbb{P}_k^n$的闭子概型. 不妨假设$P_i \in \{X_0 \neq 0\}$. 考虑自然的嵌入态射$(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i}) \to \mathbb{A}_k^n$(仿射概型)对应$k$-代数同态,

$$k[x_1, \cdots, x_n] \to k[x_1, \cdots, x_n]_f \to k[x_1, \cdots, x_n]_{P_i} \to \mathcal{O}_{X,P_i}.$$

根据证明过程$k[x_1, \cdots, x_n]_{P_i} \to \mathcal{O}_{X,P_i}$是满同态, $S^{-1}m_{P_i} \to m_{X,P_i}$是满的. 再由$m_{X,P_i}^N = 0$, 可以直接验证$\frac{\bar{g}}{\bar{s}} = \bar{h}$ (Taylor展开), 也就是可得复合同态是满同态, 从而$(P_i, \mathcal{O}_{X,P_i})$是$\mathbb{A}_k^n$的闭子概型, 也是$\mathbb{P}_k^n$ 的闭子概型.

Step 4: 以上证明了(1,2). 可以做一个线性变换使得$P_i \in \{X_0 \neq 0\}$, 然后得(0,3).

Step 5: 只需证明$V_p(J)\cap\{X_0=0\}=\emptyset$. $\square$

例4.2. $F=X, G(X,Y,Z)=X^2+YZ$. $V_p(F,G)=(P_1=[0,0,1],k)\sqcup(P_2=[0,1,0],k)$. 如何作一个线性变换放到一个仿射平面上?

4.3 平面上的闭子概型

4.3.1 平面上的一维闭子概型: 曲线

取非常值的多项式$f\in k[x,y]$, 称$C_f=V(f):=Spec(k[x,y]/(f)\subset\mathbb{A}^2$一条仿射曲线曲线.

如果$f(x,y)$不可约, 则C_f是一条整曲线; 否则$f=f_1^{r_1}\cdots f_m^{r_m}$, 此时通常记作$C_f=r_1C_{f_1}+\cdots+r_mC_{f_m}$, 此时$\dim C_{f_i}=1$.

类似的, 取非平凡的齐次多项式$F\in k[X,Y,Z]$, 称$C_F=V(F)\subset\mathbb{P}^2$一条射影曲线. 如果$F$不可约, 则$C_F$是一条整曲线; 否则$F=F_1^{r_1}\cdots F_m^{r_m}$, 此时通常记作$C_F=r_1C_{F_1}+\cdots+r_mC_{F_m}$.

事实: 一般令$x=\frac{X}{Z}, y=\frac{Y}{Z}$. 设$F\in k[X,Y,Z]$为$d$-次齐次多项式, $f(x,y)=F/Z^d$.

(1) $d_1:=\deg f\leq d$, $F'=Z^{d_1}f\in k[X,Y,Z]$为齐次多项式, $F=F'Z^{d-d_1}$;

(2) F不可约$\Leftrightarrow$ f不可约且Z不整除F.

4.3.2 平面上的零维闭概型

定理4.1. 假设$X\subset\mathbb{P}^2[X,Y,Z]$是一个零维闭子概型, 那么

(1) 存在一个坐标变换使得$X=\{P_1,\cdots,P_t\}\subset\{Z\neq 0\}$, 从而$X$是$\mathbb{A}^2(x=X/Z, y=Y/Z)$的一个闭子概型;

(2) 假设$X=V(I)\subset\mathbb{A}^2$, 那么$I=\prod_{i=1}^{l}Q_i$, 其中$\sqrt{Q_i}=m_i$是一个极大理想;

(3) $A/I\cong\bigoplus k[x,y]/Q_i$ 是一个$Artin$ 环.

推论4.1. 设F,G是齐次多项式, 假设F,G没有公因子, 则*(1) $V_p(F,G)$ 是一个闭子概型; (2) 存在一个坐标变换使得$V_p(F,G)$是$\{Z\neq 0\}=\mathbb{A}^2$的一个闭子概型*, 此时$V_p(F,G)=Spec\frac{k[x,y]}{(f,g)}$, 其中$f=F/Z^{d_1}, g=G/Z^{d_2}$.

证明. 只需证明$F \cap G$有有限多个交点. 这可以在每个仿射平面上看$f = F/Z^{d_1}, g = G/Z^{d_2}$依然是互素的. $\square$

定理4.2. *设$f(x,y), g(x,y), h(x,y) \in k[x,y]$, 令$I = (f,g)$. 如果对任意***闭点***$P \in \mathbb{A}^2$(对应极大理想的点), $h \in I_P$ (在P点的局部化), 那么$h \in I$.*

证明. 因为$\mathbb{A}^2$的极大理想和点一一对应, 由模的局部化结论可得. $\square$

补充: 设$J \leq \in k[X,Y,Z]$为齐次理想. 设$P \in \mathbb{P}^2$, 则P对应齐次理想$\mathcal{P}$. 我们可以考虑齐次局部化

$$k[X,Y,Z]_P = \bigoplus_d \{\frac{A}{S} |\ A, S\ homogenous, \deg A - \deg S = d, S(P) \neq 0\}/\sim$$

这是一个分次环. 考虑零次部分$k[X,Y,Z]_P^{(0)} = \mathcal{O}_P$. 则$k[X,Y,Z]_P = \mathcal{O}_P \cdot k[X,Y,Z]$.

若$P = [0,0,1] \in \mathbb{A}^2$, $k[X,Y,Z]_P^{(0)} = \frac{k[x,y]_{(0,0)}}{(x,y)_{(0,0)}}$.

$J_P \leq k[X,Y,Z]_P$是一个齐次理想, 则$J_P = \mathcal{O}_P \cdot J$. 令$T = V_p(J)$. 则$J_P^{(0)} = \mathcal{I}_{T,P}$, $\mathcal{O}_{T,P} = (\frac{k[X,Y,Z]_P}{J_P})^{(0)}$.

定理4.3. *(Max Noether) 设$F(X,Y,Z), G(X,Y,Z), H(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z]$, 令$I = (F,G)$. 假设$F, G$没有公因子, 故$V_p(F,G)$是一个零维概型. 设$P \in \mathbb{P}^2$, 则$P$对应齐次理想$\mathcal{P}$,*

如果对任意闭点$P \in \mathbb{P}^2$, $H \in I_P$ (在点P满足Noether条件), 那么$H \in I$.

证明. 不妨设$V_p(F,G) \subset \{Z \neq 0\} = \mathbb{A}^2 = Spec(k[x = X/Z, y = Y/Z])$. 通过除以$Z$的幂, F, G, H分别对应$f(x,y), g, h \in k[x,y]$. 由假设可知

(1) $V_p(F,G,Z) = \emptyset$, 于是$F_1(X,Y) = F(X,Y,0)$和$G_1(X,Y) = G(X,Y,0)$互素.

(2) $h = a(x,y)f + b(x,y)g$, 通过齐次化可知存在$r \geq 0$使得, $Z^r H = AF + BG$. 不妨设r最小.

反设$r > 0$. 记$F = F_1(X,Y) + ZF_2$, $G = G_1(X,Y) + ZG_2, A = A_1(X,Y) + ZA_2, B = B_1(X,Y) + ZB_2$. 于是

$$Z^r H = A_1 F_1 + B_1 G_1 + ZC$$

于是$A_1F_1+B_1G_1=0$, 从而$G_1|A_1$, 可设$A=GA'-ZA''$, 于是可以记作

$$Z^rH=(GA'-ZA'')F+BG=ZA''F+B'G.$$

由于Z不是G的因子, 可得$Z|B'$, 这和r的极小性矛盾. □

命题4.4. *设F,G,H是$k[X,Y,Z]$中的齐次多项式. 假设F对应的曲线C_F在点P光滑(等价于$(F_X,F_Y,F_Z)|_P\neq 0$), 于是$(\mathcal{O}_{C_F,P},m_{C_F,P}=(t))$ 是DVR, 记对应的赋值为v_P. 如果$v_P(H)\geq v_P(G)$, 则H在P点满足Noether 条件, 即$H\in(F,G)_P$.*

证明. 不妨设$P=[0,0,1]$, $\mathcal{O}_{C_F,P}=\frac{k[x,y]_{(0,0)}}{(f(x,y))_{(0,0)}}, m_{C_F,P}=\frac{(x,y)_{(0,0)}}{(f(x,y))_{(0,0)}}=(t))$. 记$h=u_1\cdot t^{n_1}, g=u_2\cdot t^{n_2}$, $u_i\in(k[x,y]_{(0,0)})^{\times}$.

则$n_1\geq n_2\Leftrightarrow(\bar{(h)})\leq(\bar{g})\Leftrightarrow(h)_{(0,0)}\leq(f,g)_{(0,0)}$. □

4.4 相交数

定义4.1. 设$F,G\in k[X,Y,Z]$是齐次多项式, 假设F,G没有公因子, 于是$V_p(F,G)\subset\mathbb{P}^2$是0维闭子概型, 不妨设$T=V_p(F,G)=\{P_1,\cdots,P_t\}\subset\mathbb{A}^2$, 记作$F\cap G=Spec(A)$, 其中$A$是Artin环.

定义曲线F,G的相交数为$I(F,G)=length_kA=\sum_i\dim_k(\mathcal{O}_{T,P_i}=A_{P_i})$.

设$P\in\mathbb{A}^2$, 视A为$k[x,y]$-模, F,G在P 点的局部相交数定义为$I_P(F,G)=length_k(A_P)$. 如果闭点$P\in\{Z\neq 0\}$, 则$I_P(F,G)=\dim_k(\frac{k[x,y]_P}{(f,g)_P}$. 所以$P\in V_p(F,G)\Leftrightarrow I_P(F,G)>0$

作业: 设$X=V_P(J)\subseteq\mathbb{P}^n$是射影概型. 对$P\in X$, 对应$k[X_0,\cdots,X_0]$齐次素理想, 验证$\mathcal{O}_{X,P}\cong(\frac{k[X_0,\cdots,X_0]_P}{J_P})^{(0)}$.

命题4.5. *假设以下出现的多项式均为$k[X,Y,Z]$中的齐次多项式, 考虑相交数时自动满足互素条件. 则*

(1) $I(F,G)=\sum_P I_P(F,G)$;

(2) $I_P(F_1\cdot F_2,G)=I_P(F_1,G)+I_P(F_2,G)$.

(3) $I_P(F,G)=I_P(F,G+HF)$.

证明. (1) 由定义可得.

(2) 局部上需要证明: 假设f_1, f_2和g互素, $\dim_k \frac{k[x,y]}{(f_1 f_2, g)} = \dim_k \frac{k[x,y]}{(f_1, g)} + \dim_k \frac{k[x,y]}{(f_2, g)}$. (想个正合列).

(3) 直接. □

例4.3. $F = X, G(X,Y,Z) = YX + YZ$.

命题4.6. 若$I_P(F,G) = 1$, 则P是F,G的光滑点, 而且F,G在P点横截相交, 即不妨设$P \in \mathbb{A}^2$, 则子空间$T_{F,P}, T_{G,P} \subset T_{\mathbb{A}^2,P}$ 横截.

证明. 不妨设$P = [0,0,1]$, $f = ax+by+...$, $g = cx+dy+... \in k[x,y]$. 设$m = (x,y)$. 则$I_P(F,G) = 1 \Leftrightarrow (f,g)_m = (x,y)_m$, 而这等价于$ad - bc \neq 0$ (作业). □

作业: 令$F = X - Y, G(X,Y,Z) = Y^2X + Y^2Z$. 求$I(F,G)$.

作业: 假设char $k = 0$. 计算$F = X^2Z - Y^3, G = Y^2Z - X^3$在每个点处的相交数.

4.5 Bezout定理及其应用

定理4.4. 设$F,G \in k[X,Y,Z]$是齐次多项式, 假设F,G没有公因子, 那么$I(F,G) = \deg F \cdot \deg G$.

证明. 记$\mathcal{O}$为$\mathbb{P}^2$的结构层, 则$\mathcal{O}(-F), \mathcal{O}(-G) \subset \mathcal{O}$为定义$F,G$的理想. 令$T = V_p(F,G)$. 则$T$是0维闭子概型.

于是有以下短正合列

$$0 \to \mathcal{O}(-F-G) \to \mathcal{O}(-F) \bigoplus \mathcal{O}(-G) \to \mathcal{I}_T \to 0,\ 0 \to \mathcal{I}_T \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}_T \to 0$$

张量$\mathcal{O}(d)$得到正合列

$$0 \to \mathcal{O}(d-F-G) \to \mathcal{O}(d-F) \bigoplus \mathcal{O}(d-G) \to \mathcal{I}(d) \to 0,\ 0 \to I(d) \to \mathcal{O}(d) \to \mathcal{O}_T(d) \to 0.$$

以下假设$T \subset \mathbb{A}^2$, 设$T = Spec \bigoplus_i (k[x,y]/\mathcal{Q}_i)$, $m_{P_i}^N \subseteq \mathcal{Q}_i \subseteq m_{P_i}$, 记$\dim_k(k[x,y]/\mathcal{Q}_i) = r_i$.

断言: $\dim_k \Gamma(\mathcal{O}_T(d)) = r_1 + \cdots + r_t$. 截面形如$\overline{f(x,y)} \cdot Z^d$.

证明. 因为T是零维概型, $\mathcal{O}_T(d) \cong \mathcal{O}_T$. □

断言: 当d充分大时, 则$\Gamma(\mathcal{O}(d)) \to \Gamma(\mathcal{O}_T(d))$是满射.

证明. $\Gamma(\mathcal{O}(d))$中的元素和d-次齐次多项式一一对应, 在$\mathbb{A}^2$上的表达式形如$f(x,y)Z^d$, 其中$\deg f \leq d$.

已知$k[x,y] \to \bigoplus_i (k[x,y]/\mathcal{Q}_i)$是满同态, 所以每个$f \in \Gamma(\mathcal{O}_T)$可以实现为一个次数$\leq d$ 的多项式, 从而$\Gamma(\mathcal{O}(d)) \to \Gamma(\mathcal{O}_T(d))$是满射. □

断言: $\Gamma(\mathcal{O}(d-F) \bigoplus \mathcal{O}(d-G)) \to \Gamma(\mathcal{I}(d))$是满射.

证明. Max Noether 定理. □

令d充分大, 可得

$$
\begin{aligned}
I(F,G) = & \dim \Gamma(\mathcal{O}_T(d)) = \dim \Gamma(\mathcal{O}(d)) - \dim \Gamma(\mathcal{I}(d)) \\
& = \dim \Gamma(\mathcal{O}(d)) - (\dim \Gamma(\mathcal{O}(d) \otimes \mathcal{O}(-F)) + \dim \Gamma(\mathcal{O}(d-G))) \\
& + \dim \Gamma(\mathcal{O}(d-G-F)) \\
& = \deg F \cdot \deg G.
\end{aligned}
$$

□

4.5.1 三次平面曲线的群结构

设C是一条光滑平面三次曲线$V_p(F) \subset \mathbb{P}^2$. 固定一点$O \in C$. 任意一条直线和$C$交于三点, 于是通过直线相交定义: $\psi : C \times C \to C$. 任取$P, Q \in C$. 现在定义加法

$$P + Q = \psi(O, \psi(P, Q)).$$

验证结合律.

4.5.2 Pascal 定理

命题4.7. 设C_F, C_G为三次曲线, $F \cdot G = P_1 + \cdots + P_9$. 设$C_Q$是一个二次曲线, $Q \cdot F = P_1 + \cdots + P_6$. 假设$P_1, \cdots, P_6$是$C$上的光滑点. 则$P_7, P_8, P_9$共线.

证明. 利用Max Noether 定理得$G \in (F, Q)$, 记$G = aF + QL$, 从而$P_7, P_8, P_9 \in C_L$. □

4.6 射影代数簇上的正则函数

推论4.2. 设$C \subseteq \mathbb{P}^2$是光滑射影曲线. 则$\Gamma(C) = k$

更一般的, 我们有以下结论.

定理4.5. 设$X \subseteq \mathbb{P}^n$是射影代数簇. 则$\Gamma(X) = k$.

证明. 设$f \in \Gamma(X)$. 设X由一个齐次素理想定义$X = V_p(J)$, 记$S_X = k[X_0, \cdots, X_n]/J$. 由于$X \cap \{X_i \neq 0\}$是$\mathbb{A}^n$的仿射闭子概型, 于是存在$N_1 > 0$使得$X_i^{N_1} f \in S_X$.

断言: 存在$N > 0$使得$fS_X^{(\geq N)} \subseteq S_X^{(\geq N)}$.

注意$S_X^{(\geq N)}$是有限生成S_X-模(理想), 而且因为S_X是整环, 我们得到f在S_X上是整的. 设

$$f^m + A_{m-1} f^{m-1} + \cdots + A_0.$$

考虑齐次0次部分, 可得$f \in k$. □

命题4.8. 设$X \subseteq \mathbb{P}^n$是射影整概型. 则存在一个齐次素理想J使得$X = V_p(J)$.

证明. 考虑X对应的代数簇X_v. 令$J = I_p(X_v)$. 然后验证J是齐次素理想以及X恰好是$V_p(J)$.

提示: 可以在每个仿射片上得到定义理想, 然后齐次化. □

5 曲线正规化和奇点解消

设k是代数闭域.

5.1 预备知识

1. 每个1维代数簇双有理等价于一个平面曲线.

2. 设R是有限生成k-代数而且是整环, 那么R^{ν}/R 是有限扩张.

3. 设X是代数曲线, 设点$P \in X$. 则以下条件等价

(1) P是光滑点;

(2) $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$是DVR;

(3) $(\mathcal{O}_{X,P}, m_{X,P})$是正规的, 此时称$P$是正规点.

对曲线而言, 正规化就是一个解消.

4. 蛇形引理: 假设有以下正合列的交换图

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & R \arrow[d] & S \arrow[d] & T \arrow[d] & \\
 & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "v"] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] \arrow[d] & B' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d] & \\
 & U \arrow[d] & V \arrow[d] & W \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

那么有以下正合列

$$R \to S \to T \to U \to V \to W.$$

5.2 射影簇上的正则函数

定理5.1. 设X是光滑射影平面曲线. 则$\Gamma(X) = k$.

证明. 用Noether定理. □

5.3 曲线的正规化和解消

定义5.1. 设X是一个射影代数簇. 一个光滑解消是一个双有理态射$\mu : \tilde{X} \to X$, 其中$\tilde{X}$是一个光滑射影代数簇.

定理5.2. *设C是一个整射影曲线. 如果C的解消存在则在同构意义下唯一.*

证明. 回顾: 光滑曲线到射影空间的有理映射可以延拓为态射.

可以约化为证明:

断言(作业): 如果$\psi : \tilde{C} \to \tilde{C}$是一个态射, 满足$\psi^* = id : K(\tilde{C}) \to K(\tilde{C})$. 则$\psi = id_{\tilde{C}}$. □

定理5.3. *设$C = V_P(F) \subset \mathbb{P}^2$是射影曲线, $\nu : C^\nu \to C$是正规化. 则C^ν是一条光滑射影曲线.*

证明. 第一种方案: $\nu : \widetilde{C} \to C$ 是有限态射. 设$\{U_i\}$是C的有限仿射开覆盖, 令U是它们的交. 则$\{U_i^\nu\}$是C^ν的仿射开覆盖, $U_i^\nu \to U_i$是仿射概型态射. 则$U_i^\nu \to \mathbb{A}^{n_i} \to \mathbb{P}^{n_i}$. 考虑对角线态射$U \to \prod_i \mathbb{P}^{n_i}$, 然后证明其像集的闭包是射影概型(需要系统性的关于射影态射的预备知识), 恰好同构于C^ν.

第二种方案: 通过爆破操作, 可以得到光滑射影的解消$\pi : X \to C$. 一方面根据光滑曲线的性质$\nu : C^\nu \to C$ 可以提升为$C^\nu \to X$. 令一方面根据正规化得到$X \to C^\nu$ 这个其实对应$\mathcal{O}_C$ 在$\pi_*\mathcal{O}_X$中的正规化. □

注: 在特征0上, 代数簇存在解消(Hironaka'60s); *在特征p上, 当*$\dim X \leq 3$*时, 已经证明存在解消*(Cossart-Piltant'08); Toric*奇点.*

5.4 平面曲线的爆破操作

5.5 奇点解消

定理(*理想消解*, Hironaka). *设k为特征0的域. 给定三元组(X, I, D), 其中X是k上的光滑簇; I是X上的非零理想层; D是X上的简单横截除子. 则存*

在一系列爆破的复合

$$\prod : X_r \xrightarrow{\pi_r} X_{r-1} \to \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X.$$

其中每个$\pi_i : X_i \to X_{i-1}$是沿光滑闭子簇$Z_i \subset X_{i-1}$的爆破. 特别地, $\prod$是双有理态射、射影态射. 并且, 该构造满足以下性质: 每个Z_i都与D 和各$Z_j, j < i$的原像简单横截相交; X_i中由$\pi_i^{-1}I$生成的理想层是某个简单横截除子的理想层; $\prod$在I对应的闭子簇之外是同构; 该构造关于光滑态射具有函子性: 对任何光滑态射$f : Y \to X$, 三元组$(Y, f^{-1}I, f^{-1}D)$的理想消解等于(X, I, D)的理想消解沿f拉回, 但需删去那些拉回后变成沿$\emptyset$爆破的映射.

类似地, 该构造关于域扩张K/k 具有函子性.

定理: 设k为特征0的域, X是k上的代数簇; D是X上的简单横截除子. 则存在一系列爆破的复合

$$\prod : X_r \xrightarrow{\pi_r} X_{r-1} \to \cdots \xrightarrow{\pi_1} X_0 = X.$$

其中每个$\pi_i : X_i \to X_{i-1}$是爆破, 使得X_r是光滑代数簇; $\prod$在D和奇异点之外是同构, 补集是简单横截相交的; 该构造关于光滑态射和域扩张具有函子性.

6 曲线的Riemann-Roch定理

定理6.1. *(Riemann-Roch定理)* 设C是光滑射影曲线, D是C上的除子, 记K为C的典范除子, g为C亏格. 那么$l(D)-l(K-D)=\deg D+(1-g)$.

6.1 曲线上的除子

6.1.1 光滑曲线上的除子

设C是光滑曲线. 一个除子形如$D=n_1P_1+\cdots+n_rP_r$, 其中$P_i\in C$是一个闭点.

命题6.1. 设C是光滑曲线, $0\neq f\in\Gamma(C)$. 则可以定义$div(f)=\sum_{P\in C}v_P(f)P$, 注意$v_P(f)=\dim\mathcal{O}_{C,P}/(f)_P$. 进而对有理函数$\varphi$, 可以定义$div(\varphi)$.

例6.1. 令$C=V(x^3-y^3-1)\subset\mathbb{A}^2$, $f=\frac{x}{y}$.

命题6.2. 设C是光滑曲线. 则C上的*Cartier*除子和以上定义的除子是等价的.

证明. 给定Cartier除子$D_c:(U_i,f_i=\frac{u_i}{v_i})$其中$u_i,v_i\in\Gamma(U_i)$. 则可以定义$D=\sum_{P\in C}v_P(f_i)$ (良定义).

反之, 给定除子$D=n_1P_1+\cdots+n_rP_r$. 设$m_{C,P_i}=(t_i)$. 取P_i的邻域U_i使得$t_i\in\Gamma(U_i)$ 而且P_i是t_i的唯一零点. 令$U_0=C\setminus\{P_1,\cdots,P_r\}$. 然后取... □

例子(作业): 设$C=V(Y^2Z-X^3)$. 把$D=2\cdot[1,1,1]$实现为Cartier除子的形式.

6.1.2 Cartier除子的次数

设C是射影曲线. 给定Cartier除子$D_c:(U_i,f_i=\frac{u_i}{v_i})$. 定义$D_c$的次数

$$\deg D_c=\sum_P(\dim_k\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{(u_i)_P}-\dim_k\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{(v_i)_P}).$$

容易验证以上定义是良定义的, 如果P是光滑点, 则$\dim_k\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{(u_i)_P}-\dim_k\frac{\mathcal{O}_{C,P}}{(v_i)_P}=v_P(u_i)-v_P(v_i)$.

6.1.3 除子的拉回

对曲线间的支配态射$\phi: C' \to C$. 对于C上的Cartier除子D, 可以定义f^*D, 而且有$\mathcal{O}_{C'}(f^*D) \cong f^*\mathcal{O}_C(D)$.

定理6.2. *设C是射影曲线, $\nu: C^\nu \to C$为正规化. 对于C上的Cartier除子D, 有*

$$\deg D = \deg \nu^* D.$$

证明. 不妨设D是有效除子, 然后约化为以下命题. □

命题6.3. *设$f \in k[x,y]$不可约, $C = V(f) \subset \mathbb{A}^2$, $\nu: X \to C$是正规化. 则*

(1) $\dim_k(\Gamma(X)/\Gamma(C))$ 有限($\Gamma(X)$是有限生成$\Gamma(C)$模);

(2) 取$g \in k[x,y]$和f互素, P是f,g的一个交点, 则$\nu^{-1}P = \{Q_1, \cdots, Q_m\}$, 而且

$$I_P(f,g) = (\frac{k[x,y]}{(f,g)})_P = \sum_i v_{X,Q_i}(g).$$

证明. 令$A = \Gamma(C), B = \Gamma(X)$. 则$A \to B$是整环嵌入, 而且$B/A$是有限整扩张.

(1) 已知$\Gamma(X)$是有限生成$\Gamma(C)$模, 取生成元$f_1, \cdots, f_r$. 这些元素在$\Gamma(C)$上整, 从而存在$0 \neq h \in \Gamma(C)$使得$hf_i^N \in \Gamma(C)$. 则$(h)_{\Gamma(X)} \subseteq \Gamma(C)$.

引理: $V(h)$是X的零维概型, 所以$\dim \Gamma(X)/(h) < +\infty$.

(2) 利用蛇形引理. □

更一般的, 我们有如下相关的交换代数结论.

命题6.4. *设R是有限生成k-代数, M是有限生成R-模. 假设$\mathrm{Ann}(M) = I = Q_1 \cdots Q_r$, 其中$\sqrt{Q_i} = m_i$是极大理想. 则*

(1) $M \cong \bigoplus M_{m_i}$;

(2) $\dim_k M < +\infty$.

6.1.4 主除子

定理6.3. *设C是光滑射影曲线, $0 \neq f \in K(C)$. 则$\deg div(f) = 0$.*

证明. 存在双有理态射$\phi : C \to C' \subset \mathbb{P}^2$到平面射影曲线. 假设$f = F/G$, 则$div(f) = \phi^* div(F/G)$. 由Bezout定理$\deg div(F/G) = 0$, 得$\deg div(f) = 0$. $\square$

注: 对于紧黎曼面, 对应的结论利用Stokes定理考虑$\omega = \frac{df}{f}$的留数.

6.2 除子的线性系

6.2.1 整体截面空间

设C是光滑射影曲线, D是除子. 默认$div(0)$是无穷大的除子. 令

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in K(X) \mid div(f) + D \geq 0\}.$$

可以验证这是一个线性空间, 并且同构于$\Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$.

命题6.5. *(1)* $\mathcal{L}(0) = k$;

(2) $\mathcal{L}(D) \cong \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$, 从而若$D_1 \sim D_2$, 则$\mathcal{L}(D_1) \cong \mathcal{L}(D_2)$;

(3) 若$D_1 \leq D_2$, 则$\mathcal{L}(D_1) \subseteq \mathcal{L}(D_2)$;

(4) 设$P \in C$, $\dim_k(\mathcal{L}(D+P)/\mathcal{L}(D)) \leq 1$. 记$l(D) := \dim_k \mathcal{L}(D) \leq \deg D + 1$.

证明. (1) 由射影性质.

(2) 视为常层$K(X)$的子层, 设$D : \{(U_i, h_i)\}$, 有$\mathcal{L}(D) \to \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$ $f \to s_f : s_f|_{U_i} = fh_i$, $\mathcal{L}(D) \leftarrow \Gamma(C, \mathcal{O}_C(D))$, $g_i/h_i \leftarrow s : s|_{U_i} = g_i \frac{1}{h_i}$.

(3) 直接验证.

(4) 考虑正合列$0 \to \mathcal{O}_C(D) \to \mathcal{O}_C(D+p) \to \mathcal{O}_p(D+p) \to 0$. $\square$

定义6.1. 记$l(D) := \dim_k \mathcal{L}(D) \leq \deg D + 1$.

作业: 解释$\dim_k \frac{\mathcal{L}(D+P)}{\mathcal{L}(D)} = 1$和$= 0$的意义.

例子: (1) 设$C = \mathbb{P}^1$, $D = n[0,1]$.

(2) 设$C = V_p(X^3 - Y^3 - Z^3)$, $D = 1 \cdot (P_1 = [1,0,1])$. 提示: 设$P_1 + P_2 + P_3$是$\mathcal{O}(1)$对应的一个除子, $\mathcal{L}(C, D) \subseteq \mathcal{L}(P_1 + P_2 + P_3)$, 对$f \in \mathcal{L}(D)$, 可设$f = L_1/L_2 \in \mathcal{L}(P_1 + P_2 + P_3) \cong \Gamma(C, \mathcal{O}_C(1))$ (L_1, L_2是一次的), 进而得$\mathcal{L}(D) = k$.

6.2.2 线性系

记$|D| = \mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$, 称作$D$的完全线性系(complete linear system); $l = \dim \mathcal{L}(D)$, $l-1$称作线性系的维数. 如果$l=0$, 则$|D|=\emptyset$.

命题6.6. *设$l>0$, 则$|D|$中元素一一对应于$\{D' \geq 0 | D' \sim D\}$. 以后将二者等同.*

定义6.2. 设$|D| \neq \emptyset$. 如果存在$P \in C$使得, $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(D-P)$, 则对于每个$D' \in |D|$, 我们有$D'-P \geq 0$, 此时称$P$为线性系$|D|$的**基点**.

可以得出, 存在唯一的一个最大的有效除子V(可以取0), 使得每个$D' \in |D|$, 我们有$D'-V \geq 0$, 称V是$|D|$的**固定部分**. 易知$\mathcal{L}(D-V) = \mathcal{L}(D)$.

我们可以记$|D| = |M| + V$其中$|M|$没有基点, 称作$|D|$的**自由部分**.

如果$|D|$中的元素没有公共部分, 则称线性系$|D|$**没有基点(base point free)**.

- 设$D:\{(U_i, h_i)\}$表达, 在同构$\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_C(D)$下, 给定$f \in \mathcal{L}(D)$, 限制在$U_i$上对应$\mathcal{O}_C(D)$截面为$s_f|_{U_i} = fh_i \cdot \frac{1}{h_i}$, 所以$s_f$的零点恰好对应除子$div(f)+D$.
- 取$f_1, \cdots, f_l \in \mathcal{L}(D) \subset K(C)$, 在同构$\mathcal{L}(D) \cong \mathcal{O}_C(D)$下, 限制在$U_i$上对应截面和除子形如
$$f_1 h_i, \cdots, f_l h_i \in \Gamma(U_i),\ div(f_j h_i)_{U_i} = (div(f_j)+D)_{U_i}.$$
- $V|_{U_i}$恰好对应$f_1 h_i, \cdots, f_l h_i$的公共零点.
- 按如下方式定义有理映射$\phi_{|D|}$, 在U_i上
$$\phi_i : U_i \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, P \mapsto [f_1 h_i(P), \cdots, f_n h_i(P)]$$
则(i) ϕ_i在基点以外是良好定义的, (ii) ϕ_i和ϕ_j是可以粘合的.

命题6.7. *记号如上.*

(1) 上述映射每点良好定义的当且仅当$V=0$;

(2) 在不同的基下, 上述方式定义的映射刚好差一个可逆线性变换; 所以我们把上述粘合成的映射记作$\phi_{|D|}$.

(3) $\phi_{|D|}$ 可以延拓为态射$\phi_{|M|}$.

(4) 如果$|D|$没有基点, 设H是$\mathbb{P}^{l-1}$的一个超平面除子, 则除子的拉回$\phi_{|D|}^* H \in |D-V|$. 事实上$\mathbb{P}^{l-1}$的一个超平面集合和$|D|$中的除子通过这种方式一一对应.

证明. 我们解释(4).

首先在如下情形下可以定义除子的拉回(我们之前仅对支配态射定义, 但是可逆层拉回总是合理的). 设$\phi : X \to Y$是代数簇之间的态射, D是Y上的除子, 在一个可覆盖上表示为(V_i, g_i). 假设

- D是有效除子, 即$g_i \in \mathcal{O}_Y(V_i)$, 并且$\phi(X) \cap V_i$不落在$V(g_i)$中, 这等价于$0 \neq \phi^* g_i \in \mathcal{O}_X(\phi^{-1} V_i)$.

则可以定义$\phi^* D$为$(\phi^{-1} V_i, \phi^* g_i)$, 这是$X$上的有效除子.

现在回到我们的情形$\phi = \phi_{|D|} : C \to \mathbb{P}^{l-1}$. 设$\mathbb{P}^{l-1}$的齐次坐标为$X_1, \cdots, X_l$, 令$V_j = \{X_j \neq 0\}$. 令$H_1$对应$X_1$ 定义的超平面, 在V_j上由X_1/X_j定义. 现在考虑$\phi^* H_1$. 在U_i上

$$\phi_i : U_i \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, P \mapsto [f_1 h_i(P), \cdots, f_l h_i(P)]$$

因为$|D|$没有基点, 上述定义良好. 设$U_{ij} = U_i \cap \phi^{-1} V_j$, 则在$U_{ij}$上$f_j h_i \in \mathcal{O}_X(U_{ij})^\times$, $\phi^* H_1|_{U_{ij}} = div(\frac{f_1 g_i}{f_j g_i}) = div(f_1 g_i)$. 所以在$U_i$上$phi^* H_1|_{U_i} = div(f_1 g_i) = div(f_1) + D$, 在整个$C$上, $\phi^* H_1 = div(f_1) + D$. $\square$

例子: (1) 设$C = \mathbb{P}^1$, $D = n[0,1]$. 描述$\phi_{|D|}$.

(2) 设$C = V_p(X^3 - Y^3 - Z^3)$, 设$D = P_1 + P_2 + P_3$是$\mathcal{O}(1)$对应的一个除子, 描述$\phi_{|D|}$.

6.2.3 映射度

定理6.4. 设$\eta : C' \to C$是光滑射影曲线的支配映射. 对任意闭点P, 有$\deg \eta^* P = [K(C') : K(C)]$.

证明. 注意C'事实上可以视为C在$K(C')$的正规化: 对C做仿射覆盖$C = \cup U_i$, 令$U_i' = Spec\, \Gamma(U_i)^\nu_{K(C')}$, U_i'粘成曲线C'.

回顾: $\Gamma(U_i) \to \Gamma(U_i)^\nu_{K(C')}$是有限环同态, $\Gamma(U_i)^\nu_{K(C')}$作为$\Gamma(U_i)$-模是无挠的, 于是得到$(\Gamma(U_i)^\nu_{K(C')})_P$ 是自由$\Gamma(U_i)_P$模, 秩为$[K(C') : K(C)]$.

取局部参数$t \in m_{C,P}$, 即$m_{C,P} = (t)$, 则

$$\deg \eta^* P = \dim_k((\Gamma(U_i)^\nu_{K(C')})_P/(t) \cong (\Gamma(U_i)^\nu_{K(C')}) \otimes k(P)) = [K(C') : K(C)].$$

$\square$

6.3 微分和典范除子

6.3.1 微分

定义6.3. 设A是k-代数, M是一个A-模. 一个k-线性映射$d_M : A \to M$, 如果满足Newton-Leibniz法则

$$d_M(a \cdot b) = ad_M(b) + bd_M(a)$$

则称d_M是一个A到M的微分. 注意总有$d(1) = 0$, $df(a_1, \cdots, a_n) = \sum_i f_{x_i} da_i$.

例6.2. 令$R = k[x_1, \cdots, x_n]$, $\Omega_{R/k} = \bigoplus R \cdot dx_i$. 通常的微分

$$d : k[x_1, \cdots, x_n] \to \Omega_{R/k},\ f \mapsto \sum_i f_i dx_i.$$

则以上运算满足如下泛性质.

定义6.4. 设A是k-代数, 如果A-模$\Omega_{A/k}$, 以及微分$d : A \to \Omega_{A/k}$满足如下泛性质:

- 对任意微分$d_M : A \to M$, 存在唯一的A-模同态$\varphi : \Omega_{A/k} \to M$使得$d_M = \varphi \circ d$,

则称$\Omega_{A/k}$为A相对k的微分模.

定理6.5. 设A是k-代数. 则微分模存在.

证明. 设$J \leq A \otimes_k A$由$1 \otimes a - a \otimes 1$生成的理想, $A \otimes_k A$从左边定义为A-模.

$$d : A \to \Omega_{A/k} = \frac{J}{J^2}, a \mapsto \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}$$

容易验证其满足泛性质. $\square$

定理6.6. 设$A = \frac{k[x_1, \cdots, x_n]}{(f_1, \cdots, f_m)}$是有限生成$k$-代数. 则

$$d : A \to \Omega_{A/k} = \frac{\bigoplus A \cdot dx_i}{\sum_j df_j}, \overline{g} \to \overline{dg}.$$

为A相对k的微分模(相对微分).

证明. 直接验证. □

命题6.8. 微分模和局部化可交换, 即$\Omega_{S^{-1}A/k} \cong S^{-1}\Omega_{A/k}$.

证明. 可以用泛性质, 也可以用特殊的构造: 比如考虑$A_f \cong \frac{A[y]}{(yf-1)}$, 我们有$\Omega_{A_f/k} = \frac{A_f\Omega_{A/k}\bigoplus A_f\cdot dy}{A\cdot(fdy+ydf)} \cong f^{-1}\Omega_{A/k}$. □

6.3.2 曲线的微分层

设X是代数簇. 定义微分预层

$$\Omega^{pre}_{X/k}(U) = \Omega_{\Gamma(U)/k}$$

层化后得到微分层$\Omega_{X/k}$, 并且可以定义微分运算$d: \mathcal{O}_X \to \Omega_{X/k}$.

命题6.9. 如果$X = Spec(A)$是仿射代数簇, 则$\Omega_{X/k}(X) = \Omega_{A/k}$. 此时$\Omega_{X/k} = \widetilde{\Omega_{A/k}}$.

补充: 设$X = Spec(A)$是仿射概型, M是A-模, 则定义层

$$\widetilde{M}(U) = \{s: U \to \sqcup_{P\in U} M_P \mid \forall P \in U, \exists\, \text{nbhd}\, V = D(f), t \in M_f, s|_V(z) = t_z\}.$$

验证$\widetilde{M}(X) = M, \widetilde{M}(D(f)) = M_f$.

设C是光滑曲线, $P \in X$, $f \in \mathcal{O}_{X,P}$. 如果$(f - f(P))_P = m_{X,P}$, 则称f是P点的局部参数.

命题6.10. 设C是光滑曲线, $P \in X$. 如果f是P点的局部参数. 则

(1) 存在邻域U, $f \in \Gamma(U)$是每一点处的局部参数.

(2) $\Omega_{C/k,P} = \mathcal{O}_{C,P} \cdot df$, 从而$\Omega_{C/k}$是可逆层. 事实上我们有$\Omega_{C/k,P}\otimes_{\mathcal{O}_{C,P}} \cong \frac{m_{C,P}}{m^2_{C,P}}$.

证明. (1) 不妨设$C = V(f_1, \cdots, f_m) \subset \mathbb{A}^n$是仿射曲线. 设$I = (f_1, \cdots, f_m)$, $A = k[x_1, \cdots, x_n]/I$.

回顾$\frac{m_{C,P}}{m^2_{C,P}} \cong \frac{\bigoplus_i dx_i}{Span_k\{df_1,\cdots,df_n\}}$秩为1, 而且对$g \in m_{C,P}$, $\bar{g} \in \frac{m_{C,P}}{m^2_{C,P}}$ 非零$\Leftrightarrow$ $m_{C,P} = (g)$. 在上述同构下, $g \mapsto dg|_P$.

注意到f在P点是局部参数当且仅当(以下$f \in k[x_1, \cdots, f_n]$代表$f$的提升)

$$\text{rank}(J_P = \frac{\partial(f, f_1, \cdots, f_m)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)}|_P) = n,$$

秩达到极大的点集是一个开集, 所以存在P的邻域使得$f \in \Gamma(U)$是每一点处的局部参数.

(2) 不妨设f在C上是局部参数.

一方面我们有

$$\Omega_{C/k}(C) = \frac{A \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus A \cdot dx_n}{\sum_j A \cdot df_j}$$

局部上

$$\Omega_{C/k,P} = \frac{\mathcal{O}_{C,P} \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{C,P} \cdot dx_n}{\sum_j \mathcal{O}_{C,P} df_j}.$$

另一方面由(1)的证明可得, 存在对任意$P \in C$,

$$\frac{\mathcal{O}_{C,P} \cdot dx_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{C,P} \cdot dx_n}{\sum_j df_j} \otimes_{\mathcal{O}_{C,P}} (k(P) = \frac{\mathcal{O}_{C,P}}{m_{C,P}}) = k(P) \cdot df.$$

由此得出$\Omega_{C/k}(C) = A \cdot df$并且$\Omega_{C/k} = \mathcal{O}_C df$.

最后df在$A \cdot df$中是无挠的, 否则存在$g \in A$, $g \cdot df = 0$, 则在主开集$D(g)$上$df = 0$, 但是$\Omega_{C/k} \otimes k(P) = k(P) \cdot df$是一维的.

综上可得$\Omega_{C/k}(C) = \mathcal{O}_C(C) df$是自由模. □

例6.3. 设$C = \mathbb{P}^1$. 通过局部参数, 描述$\Omega_{C/k}$, 说明$\Omega_{C/k} \cong \mathcal{O}(-2)$.

设$C = V_p(X^3 - Y^3 - Z^3) \subset \mathbb{P}^3$. 描述$\Omega_{C/k}$, 说明$\Omega_{C/k} \cong \mathcal{O}_C$.

找局部参数$\{X, Z \neq 0\}, dx$; $\{Y, Z \neq 0\}, dy$; $\{Y, X \neq 0\}, d(x/y)$, $dy = \frac{x^2}{y^2} dx$...在下一节解决.

6.3.3 有理微分和典范除子

定理6.7. *设C是代数曲线, $f \in K(C)$为某一点P的局部参数. 则$\Omega_{K(C)/k} = K(C) \cdot df$.*

证明. 由NL-法则, 在$\mathcal{O}_{C,P}$的微分决定了$K(C)$的微分, 于是$\Omega_{K(C)/k} = K(C) \cdot df$. 或者直接用微分模和局部化可交换得到. □

定义6.5. 设C是代数光滑射影曲线, $\Omega_{K(C)/k} = K(C) \cdot df$, 一个元素$\omega \in \Omega_{K(C)/k}$称作有理微分. 如果$\omega \neq 0$, 则对于每一点$P$, 取$t_P$为$P$附近的局部参数, 可记$\omega = f_P dt_P \in \Omega_{C/k,P} = \mathcal{O}_{C,P} dt_P$. 令$v_P(\omega) := v_P(f_P)$. 定义

$$div(\omega) = \sum_P v_P(f_P) P$$

称作C的一个**典范除子**.

命题6.11. *设C是代数光滑射影曲线, 设$0 \neq \omega \in \Omega_{K(C)/k}$. 则在上述定义中,*

(1) 在每一点P, 不依赖于局部参数的选取;

(2) 只有有限多个P使得$v_P(\omega) \neq 0$;

(3) 典范除子彼此双有理等价, 记作K_C, 不引起歧义情况下记作K;

(4) $\mathcal{O}_C(K) \cong \Omega_{K(C)/k}$.

证明. (1) 由于两个局部参数t', t, $dt'/dt \in \mathcal{O}_{C,P}^{\times}$.

(2) 记$\omega = gdf$. 则存在一个开集U使得$g, f \in \Gamma(U)$而且f在U上每一点是局部参数. 所以当$v_P(\omega) \neq 0$发生时, 必须$P \in V_C(g)$或$P \in C \setminus U$.

(3) $\omega' = g'df$, 则$div(\omega') = div(\omega) + div(g')$.

(4) 回顾对可逆层$\mathcal{L} : \{(U_i, s_i)\}$, 一个有理截面$\omega = \{(U_i, g_i s_i)\}$ 对应的除子$div(\omega) := \{(U_i, g_i)\}$, 对应的层$\mathcal{O}_C(div(\omega)) := \{(U_i, 1/g_i)\}$, 这个层和$\mathcal{L}$同构. □

6.4 Riemann-Roch定理以及应用

6.4.1 定理的陈述和解读

定理6.8. *(Riemann-Roch定理) 设C是光滑射影曲线, D是C上的除子, 记K为C的典范除子, g为C亏格. 那么$l(D) - l(K - D) = \deg D + (1 - g)$.*

推论6.1. *记号如上, 则$l(K) = g \geq 0$以及$\deg K = 2(g - 1)$.*

证明. 分别令$D = 0, D = K_C$, 然后利用Riemann-Roch定理可得. □

推论6.2. *设C为d次光滑射影平面曲线, $p \nmid d$. 则$g(C) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}$.*

证明. 假设$C = V_p(F)$, 则在一点P处的切空间由$[F_X, F_Y, F_Z]$决定: 直线$L = aX + bY + cZ$与之相切当且仅当$aF_X + bF_Y + cF_Z = 0$.

回顾: $F_X = Z^{d-1} f_x, F_Y = Z^{d-1} f_y$, $f_x dx + f_y dy = 0$, 当$f_x \neq 0$时, y为参数.

接下来计算$d(x = X/Z)$对应的除子为F_Y/Z^2.

假设$F = X^d + ...$ $(V(F,Y,Z) = \emptyset)$, 也可以假设$V(F,F_X,Z) = \emptyset(?)$.

(1) 在$\{Z \neq 0\}$, $dx = -\frac{f_y}{f_x}dy$对应的除子恰好由f_y定义.

(2) 在$\{Z = 0\}$, 此时$Y \neq 0$. 令$x' = X/Y, z' = Z/Y$. $f'_{x'}dx' + f'_{z'}dz' = 0$, $F_X/Y^{d-1}dx' + F_Z/Y^{d-1}dz' = 0$, $dx' = -\frac{F_Z}{F_X}dz'$, 按照假设$z'$为局部参数.

$$dx = d\frac{x'}{z'} = -\frac{z'dx' - x'dz'}{z'^2} = -\frac{z'dx' - x'dz'}{z'^2} = \frac{F_Y dz'}{F_X z'^2}.$$

综上可得. □

6.4.2 小亏格曲线的分类

定理6.9. 当$g = 0$时, $C \cong \mathbb{P}^1$.

定理6.10. 当$g = 1$时,

(1) $K_C \sim 0$;

(2) 设$P \in C$, 则$\phi_{|3P|} : C \to \mathbb{P}^2[X_1, X_1, X_2]$将$C$嵌入为光滑三次曲线.

证明. 线性系$|3P|$没有基点, $\phi_{|3P|} : C \to \mathbb{P}^2$是一个态射. 已知$l(P) = 1, l(2P) = 2, l(3P) = 3, \cdots$, 所以$\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(0) = Span_k\{1\}$, 可取

$$1 \neq x_1 \in \mathcal{L}(2P), x_2 \in \mathcal{L}(3P) \setminus \mathcal{L}(2P)$$

则作为有理态射$\phi_{|3P|} = (1, x_1, x_2)$, 事实上在$C \setminus \{P\}$可以如此定义.

由于$l(nP) = n$, x_1, x_2能代数生成$\mathcal{L}(nP)$, 尤其$x_1^2 \in \mathcal{L}(4P) \setminus \mathcal{L}(3P), x_1x_2 \in x_1^2 \in \mathcal{L}(5P) \setminus \mathcal{L}(4P), x_1^3, x^2 \in \mathcal{L}(6P) \setminus \mathcal{L}(5P)$. 于是我们得到代数关系

$$x_2^2 - x_1^3 - ax_1x_2 - bx_1^2 - cx_2 - dx_1 - e = 0.$$

由此可知C的像落在一条三次曲线上.

验证$\phi_{|3P|}$是单射.

□

6.5 Riemann-Roch定理的证明

6.5.1 分布(distribution)

6.5.2 trace和留数

6.5.3 对偶(duality)